

D i f s.

1653

Lip. 1653.



Qe 2

1412

Qe

1412

4

12a

D E
GENERALI ET ABSOLUTA
VIRIUM MECHANICARUM
MENSURA
DISSERTATIO

PROPOSITA

A

FRANCISCO ZALLINGER

PHYSICES THEORETICÆ, ET EXPERI-
MENTALIS, NEC NON HISTORIÆ NATU-
RALIS, ET MINERALOGIÆ IN CÆSAREO-
REGIA LEOPOLDINA UNIVERSITATE
OENIPONTANA PROFESSORE
PUBL. ORDIN.

CUM

RITU PUBLICO AC SOLEMNI
SUPREMA
AA.LL. AC PHILOS. LAUREAM

IMPERTIRET

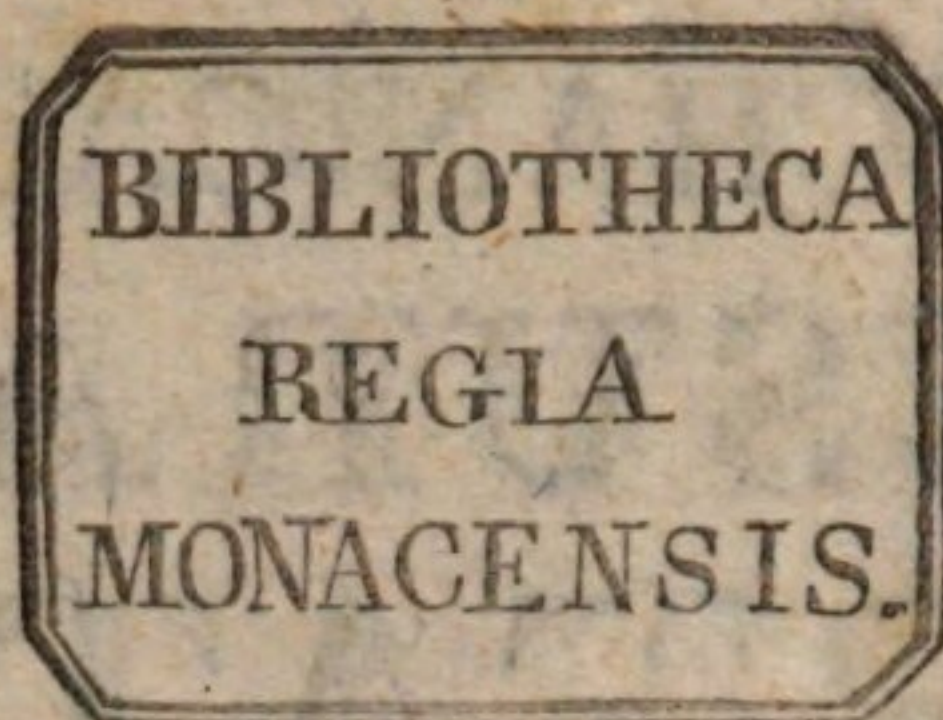
Mense Augusto Anno MDCCCLXXVII.

PERMISSU SUPERIORUM.

OENIPONTE,

Typis JOAN. THOM. NOB. DE TRATTNER
CÆS. R. AUL. TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.

De



*Omnia in Mensura, & Numero, &
Pondere disposuisti. SAP. XI. v.*

21.



NOMINA

REVERENDISSIMI AC ILLUSTRISSIMI
PRÆN. NOB. CÆTERORUMQUE

D. D. CANDIDATORUM,

QUI

VIRTUTE ET SANGUINE CONSPICUI

E NUMERO 87 AUDITORUM

LEGITIMO EXAMINE TENTATI ET ADPROBATI

AUCTORITATE ET CONSENSU

ILLUSTRIUM, MAGNIF. SPECTAB. ET
CLARISS. VIRORUM

ILLUSTRIS, MAGNIFICI AC CONSULTISS. DOMINI
UNIVERSITATIS RECTORIS,

PLUR. REV. ILLUSTR. AC MAGNIFICI INCLEYTÆ
FACULTATIS PHILOSOPHICÆ

DOMINI DIRECTORIS,

CÆTERORUMQUE CLARISS. EJUSDEM FACULTATIS
PHILOSOPHICÆ

D. D. PROFESSORUM

RITU PUBLICO ET SOLEMNI
SUPREMA AA. LL. ET PHILOS. LAUREA

INSIGNITI SUNT:



Reverendiss. ac Illustriss. D. Joannes S. R. I.
Comes a Spaur, Flavon, & Valer &c.
Ecclesiæ Cathedr. Tridentinæ Canonicus
Ananiensis Tyrol. Collegii Theres. Alum-
nus. *

D.

D. Joan. Barth. Bonelli Flemenf. Tyr.
D. Dominic. Lenauer Rotholzenf. Tyrol.
D. S. N. Al.
D. August. Ortler Stilpfenf. Tyr.
D. Joan. Bapt. Wohlgemuth Caldar. Tyr.
D. S. N. Al.

*

D. Petrus Montibeller Roncegnenf. Tyr.
D. Anton. Würstl Seb. Tyr. D. S. N. Al.
Prænob. D. Joseph. Elzenbaum a Wissen-
heim e fano S. Laurent. Tyr.
D. Jos. Reiter Bulsanenf. Tyr.
Præn. D. Joan. Nep. Kleblsperg de Thum-
burg Brunopolit. Tyr.
D. Phil. Jac. Holzer Sextenf. Tyr.
D. Joan. Georg. Faistenberger Hal. Tyr.
D. Florian. Ritter Altstettens. Helvet.
D. Josephus Gostner Felsensis Tyr.
D. Jos. Ant. Rudolph Kaltenbrunnens. Tyr.
Præn. D. Jos. Aloyf. de Lemmen & Lin-
singsburg Wilthin. Tyr.
Præn. D. Andr. Kleblsperg de Thumburg
Sterzing. Tyr.
D. Joan. Bapt. Grassmayr Brixinens. Tyr.
D. S. N. Conv.
D. Josephus Gasser Veldkirchenfis Rhæto-
Austriacus.
D. Bened. Blas Latschenf. Tyr.
Prænob. D. Aloysius, de Erlach Sebatensis
Tyrol. D.

D. Franc. Xav. Ainacherer Milbac. Tyr.
D. Petrus Doswald Tugio-Menzing. Hel-
vet. D. S. N. Al.

Nob. D. Anton. Violand Oenipont.

D. Andreas Niderweger Tauferens. Tyr.

D. Anton. Tschott Nauderens. Tyr.

Nob. D. Vigilius Tevini Ananienf. Tyr.

D. Matth. Egger Kuensens. Tyr.

D. Jos. Padeller Graunens. Tyr.

Prænob. D. Joan. de Roschmann Oenip.

Præn. D. Joseph. Zoller de Zollerhausen
Wilthin. Tyr.

D. Jos. Ebner Meran. Tyr.

D. Joan. Hauptmann Halens. Tyr.

Præn. D. Anton. de Tchusi a Schmidho-
fen Inticens. Tyr. D. S. N. Al.

Accessores.

Rev. ac Perdoct. D. Urban. Aschbe Car-
niol. Pöllens. SS. Theol. in 3 an. Stud.
Sacerdos.

Rev. ac Perdoct. D. Durig SS. Theolog.
Stud. Tschaggun. Rhæto - Austr.

Ornat. ac Perdoct. D. Steudl Wehingenf.
Suev. Juris univ. Cand.



PRÆFATIO.



Qui ultra vulgaria mechanicæ principia, quæ in Physica exponi solent, non progreditur, næ is multa ignorabit ex præclarissimis nostri ævi inventis, quæ non minus sua se utilitate, quam dignitate, ac elegantia commendant. Nempe ea est Physici studii amplitudo, ac temporis præfixi brevitās, tamque exiguus Matheſeos adparatus, quem Tyrone ad Physicam adferunt, ut iisdem fere non nisi prima Mechanicæ rudimenta exponi: difficiliora autem pro historica tantum notitia attingi queant, aut omnino prætermitti debeant. Agitur



gitur quidem in Physica de viribus gravitatis
tam terrestris, quam universalis, de motu
rectilineo, & curvilineo, de æquilibrio in ma-
chinis: verum ne tyronum vires succumbant,
tempusque aliis materiis subtrahatur, quam
limitata, ac imperfecta omnis disquisitio esse
debet? quam multa oportet supponere ab aliis
demonstrata? Si quarundem virium rationes
exponuntur, de mensura earum generali, &
absoluta, licet ad naturæ cognitionem pluri-
mum faceret, nihil statuitur: motus in casi-
bus facilioribus, ac in medio non resistente
expenditur: in machinis autem fere non nisi
æquilibrium ponderum spectatur, cum tamen
præcipuus earum usus in motu per actionem
animalium, aut fluidorum producto consistat:
itaque absolutior harum rerum pertractio Me-
chanicæ sublimiori reservatur, ad quam ut
adolescentibus Physices curriculum egressis,
rerumque naturalium studio adhuc flagranti-
bus



bus animum facerem, hac scriptione potissimum adlaboravi: cum enim generalem, & absolutam virium mechanicarum mensuram inquirerem, simul Mechanicæ fundamenta ita jeci, ut inde tyro via omnino plana ac tuta ad profundiora illius arcana deducatur: imprimis autem paulo distinctiorem virium, ac potentiarum mensuram adferre conatus sum, ac notionem metaphysicam, quam de celeritatibus, ac viribus habemus, ad physicam trans tuli, ac omnino sensibilem: unde illud commo- di nactus sum, ut formulis, quas vulgo ad- hibent, æquationes substituierim, quæ non tan- tum similitudinem proportionis, sed æqualita- tem etiam terminorum exprimant: & hoc qui- dem artificio problemata plurima Mechanicæ longe elegantius, expeditius, distinctius sol- vuntur: ipsum autem hoc virium sistema la- tissime patet, atque ad omne potentiarum ge- nus, quamcunque rationem distantiarum, aut
velo-



velocitatum &c. sequantur, ad vires etiam animalium, ac fluidorum citra difficultatem adplicatur: qua certe ex re in summa motuum, & virium diversitate mira naturæ simplicitas elucet: cæterum nemo mihi vitio vertat, in hac scriptione frequenter me calculo uti, quem infinitesimalem dicimus: nemo enim in Mechanicam paulo profundius penetrabit, qui hujus calculi notitia, ceu clave destitutus sit: non est hic locus, ut illius necessitatem pluribus demonstrem; qui in recentiorum libris peregrinus non est, & incredibiles præsertim ad Mechanicam accessiones a sæculo factas expendit, negare non poterit, ex hac nova calculos subducendi ratione tanquam uberrimo fonte pleraque inventa emanasse. Sed neque video, qua ratione Mechanica vel promoveri, vel paulo solidius pertractari sine calculi infinitesimalis subsidio queat: nam, ut Cel. de la Caille in lect. Elem. Math. §. 963 inquit:



*inquit: Nulla fere est scientia physico - mathematica, quæ, ut penitus exhauriatur, non hujus calculi ope continua egeat. Sane quo pacto adfectiones motus a potentia utcunque variabili producti determinabis, nisi ad tem-
puscula infinitesima confugas, in quibus motum omnem pro rectilineo, & æquabili, omnemque potentiam pro constanti habere licet? Quis sine hoc calculo optimam machinæ dispositionem definiat, ut dato tempore effectum maximum producat? Difficultas autem, quam huic calculo quidam adfingunt, mihi tam exigua videtur, ut tyronem vulgari jam algebra, ac geometria imbutum non multis adeo paginis ea edoceri posse credam, quæ ad sublimiorem Mechanicam necessaria fuerint. Sæpe his difficiliora ex Metaphysica, aut sectionibus conicis Tyronibus proponuntur: quin illos ipsos, qui huic calculo parum se amicos exhibent, a nomine potius, quam re ipsa abhorre-*



horrere existimo: nam dum in Mechanicis
versantur, quoties de tempusculis, de spa-
tiolis, de celeritatibus, & arcubus infinite
parvis differunt, ac magna etiam contentio-
ne, neque sine erroris periculo disputant?
Cur ergo non etiam expressiones algebraicas
ejusmodi quantitatum admittant, cum earum
ope Problemati mira elegantia, facilitas, ac
multo generalior solutio concilietur? Cujus
quidem rei specimen forte sæpius in hac scri-
ptione occurret, in qua generalem de virium
Mechanicarum mensura Theoriam utilioribus
illustrare exemplis conatus sum, quantum dis-
sertationis limites patiebantur: iidem, ut in
argumento amplissimo stylo fere compendia-
rio uterer, plane jubebant. Vale benevole
Lector, meosque conatus æqui bonique con-
sule.

CON-

CONSPECTUS MATERIARUM.

CAPUT I. *De Notionibus metaphysicis virium mechanicarum.*

CAPUT II. *De Mensura Physica virium mechanicarum.*

CAPUT III. *De Mensura virium constantium.*

CAPUT IV. *De Mensura virium variabilium.*

CAPUT V. *De Mensura virium centralium.*

CAPUT VI. *De Mensura virium, quibus homines, jumenta, ac fluida sunt prædita.*

CAPUT VII. *De Mensura virium ope vectis agentium.*



C A P U T I.

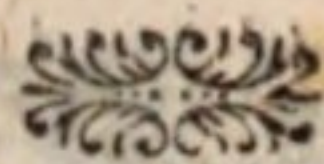
De Notionibus metaphysicis Virium mechanicarum.

§. I.

Si naturam *motus* attentius examinemus, in illo distinguere licet *spatium*, quod a corpore percurritur, *tempus*, quo motus durat, & *celeritatem*, seu rationem percurfi spatii ad tempus, quo id factum est: censemus enim corpus eo celerius moveri, quo majus spatium minore tempore conficit, & motus pro æquali habetur, si intra æqualia temporum intervalia, æqualia percurreuntur spatia.

§. II.

Corpus sua natura ad quietem, ac omnem motum est plane indifferens: cum enim & quiescere possit, & diversissimos habere motus, in immutabili ejus natura ratio non invenitur, ut nunc potius moveatur, quam quiescat, hoc potius motu incedat, quam alio: jam ea ratio sufficiens, quæ corpus a quiete ad cer-



tum motum, vel ab uno motu ad alium, aut a motu ad quietem determinat, *vis* aut *potentia* vocatur.

§. III.

Omne corpus perseverat in statu quietis, vel motus æquabilis in directum, nisi a causa extranea cogatur statum suum immutare. Certe licet ratio vel experientia immediate veritatem hujus legis non ostenderet, ea tamen instar hypothesis assumpta, motus corporum terrestrium, ac coelestium ita definiuntur, ut observationes cum theoria huic legi innixa optime congruant, ac veram naturæ legem esse demonstrent: jam illud, quod corpus determinat, ut in suo statu quietis vel motus æquabilis indirectum perseveret, nisi causa extranea impediat, dici solet *vis inertiae*: ipsa determinatio ad percurrentem motu æquabili, & rectilineo intra certum tempus aliquod spatium, vocatur *celeritas potentialis*: & ratio spatii actu motu æquabili percurfi, ad tempus, quo percurritur, *celeritas actualis* nuncupatur, demum si singulæ corporis partes eadem velocitate progrediuntur, qua totum corpus movetur, summa celeritatum omnium partium æquabitur massæ ductæ in velocitatem corporis, quod productum *quantitas motus* adpellatur.

§. IV.

Causæ, seu vires extraneæ, quæ statum corporis immutant, & in Mechanica considerari



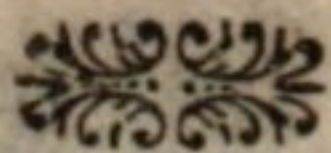
rari solent, huc fere reducuntur. 1.) Sunt ipsa corpora sibi occurrentia: constat enim unum corpus occurrens in alterum vel quiescens, vel tardius motum, illius celeritatem, vel etiam directionem mutare: & vicissim corpus impulsus mutationi sui status resistere, ac in impellens reagere.

2.) *Gravitas*, & quidem non tantum *terrestris*, qua prope superficiem terræ corpora in altum projecta versus centrum telluris urgeri observamus, sed etiam *universalis* illa, qua Planetæ, & Satellites, Cometæ quoque suis in orbitis retinentur.

3.) *Vires hominum, & jumentorum*, quæ ope suorum musculorum, ac nervorum, uti & proprii corporis pondere movere alia corpora possunt.

4.) *Pressio, & incursus fluidorum*, præsertim aquæ & aeris; quæ motum in corporibus vel producant, aut eidem resistunt. Hæ sunt fere illæ vires, quibus motus corporum saltem majorum, præsertim in machinis, determinatur, ac propterea vires etiam *mechanicæ* dicuntur.

* Procul dubio plures aliæ vires in corporibus inveniuntur, ut ex cohesione solidorum, & fluidorum, ac præsertim ex operationibus chemicis in Physica probatur: verum dici hæ solent vires speciales corporum: & quoniam lex, quam earum actio sequitur, nondum experimentis cognita est, de earundem mensura frustra quæreretur: nihilominus haud obscure intelligetur, ea, quæ de virium mechanicarum



mensura dicturus sum, ad vires quoque speciales corporum extendi posse, siquidem de earundem lege constaret.

*** Porro de mensura virium, quas corpora sibi occurrentia in conflictu exerunt, non opus existimo, plura verba facere: quippe actio ejusmodi virium veluti momento perficitur, aut saltem tempore tam exiguo, quod omnem calculi subtilitatem effugit, ut si mechanicum effectum spectes, actionem omnino momentaneam dicere possis: unde leges conflictus fere ex solo principio de actionis, & reactionis equalitate facile determinantur, & in omnium Physicorum libris jam satis explicatæ inveniuntur: quamquam si etiam communicationem, ac destructionem motus per vires repulsivas fieri ponamus, ex generali mea virium mensura, licet paulo operosius, eadem conflictus leges deduci possent, ut de mensura virium variabilium acturus animadvertam.*

§. V.

Vires Mechanicæ dividi possunt in *constantes*, & *variabiles*: Vis constans est, quæ continuo ita agit, ut æqualibus temporibus, æqualia velocitatis incrementa, vel decrementa producat. Secus vis pro variabili habetur, uti si ipsius actio pendeat vel a distantia corporis ab aliquo centro virium, vel ab ipsa corporis celeritate. Exemplum vis constantis nobis suppeditat gravitas terrestris: inter



ter vires variabiles pertinet gravitas universalis agens in ratione directa massarum, & reciproca duplicata distantiarum: resistentia medii agens in ratione duplicata celeritatum &c.

§. VI.

Et si natura virium omnino nos lateat, evidens tamen est, effectum, quem producunt, ipsis proportionalem debere esse: unde & mensura causarum, ex mensura effectuum tuto desumitur: quod si vis constans continuo æqualiter agat, manifestum est 1.) *effectum eo majorem fore, quo major sit ipsa vis, & quo longiori tempore agat*: proinde effectum esse in ratione composita vis constantis, & temporis, quo agit. Hæc sane mensura virium, communi æstimationi effectuum conformis est: ita fossores eo plus agere censentur, quo majorem effectum eodem tempore producunt, & quo diutius agunt: si autem vires plurium fossorum inter se conferuntur, æstimamus illas a magnitudine perfecti operis, & temporis, quo perficiebatur, brevitatem. *Vide hac de re Boscowichii Suppl. ad L. I. Phil. Stayanæ num. 140.*

2.) *Æque manifestum est, effectum virium, quibus corpora ad motum sollicitantur, alium non esse, quam celeritatem productam vel destructam in omnibus partibus corporis, seu ipsum motum totius corporis (quem motus quantitatem diximus §. III) productum, vel destructum: erit igitur effectus a vi quapiam productus*



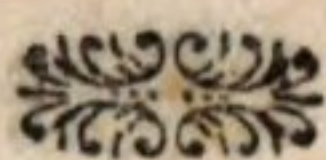
ctus in ratione composita massæ, & celeritatis, quæ a vi agente in corpore producit, vel destruitur.

3.) Habetur ergo duplex ratio, quem effectus a vi constante productus sequitur: & facta utriusque rationis comparatione erit generatim *ratio composita, seu productum ex vi constante, in tempus, quo agit, ut productum ex massa, quam sollicitat, in celeritatem, quam in illa producit, vel destruit.*

* *Ex his quidem mensura respectiva virium constantium haud ægre deduceretur: verum ut mensuram quoque absolutam, & quidem generalem, etiam virium variabilium determinare possimus, prius motum corporis tempore infinite parvo peractum rite examinare oportet: ostendam enim his tempusculis omnem potentiam pro constanti, omnemque motum pro æquabili haberi posse.*

§. VII.

Leges motus tempore infinite parvo spectati.
 I) *Corpus celeritate finita præditum, tempore infinite parvo primi ordinis (quem, nisi speciatim moneam, semper intelligo) per solam vim inertiae percurrit spatiolum infinitissimum ejusdem ordinis: nam si neges, percurrat eo tempusculo spatium finitum: ergo cum continuo motus duret, tempore finito, celeritate finita conficeret spatium infinitum tanquam summam infinite multorum spatiorum finitorum, quod*



quod absurdum est; si autem ponas, eo tempusculo spatiolum percurri, quod tantum infinitesimum sit secundi ordinis, consequens est, ut, dum corpus sola vi inertiae agatur, tempore finito celeritate finita tantum describeret spatiolum infinitesimum primi ordinis, seu nullum finitum, quod æque absurdum est.

2) *Corpus celeritate infinite parva prædictum, tempore infinitesimo percurreret spatiolum infinite parvum secundi ordinis*: nam celeritate infinities minore conficitur eodem tempore spatium infinities minus: cum ergo tempore infinitesimo celeritate finita spatium infinitesimum primi ordinis percurratur per præc. celeritate infinite parva eodem tempore tantum spatiolum infinitesimum secundi ordinis conficietur.

3) *Si celeritas finita tempore infinitesimo, quantitate infinita parva augeatur, vel minuat, corpus eo tempusculo percurreret spatium infinitesimum primi ordinis*: quippe spatium infinitesimum primi ordinis, quod ob celeritatem finitam per n. 1. describeretur, propter accedens augmentum vel decrementum celeritatis infinite parvum, non nisi quantitate infinitesima secundi ordinis augetur, vel minuitur per præced. hæc autem spatium infinitesimum primi ordinis per celeritatem finitam descriptum nulla quantitate determinata mutabit.

4) *Vis finita tempore infinite parvo nequit producere, nisi celeritatem infinite parvam*. Quod si neges, producat velocitatem finitam: quare cum vis illa ponatur continuo age.



agere, & corpus per vim inertiae acquisitam velocitatem semper conservet, tempore finito, seu infinite multis tempusculis infinitesimis acquireret infinitos gradus velocitatis finitae: id est, potentia finita, tempore finito, infinitam produceret velocitatem, quod absurdum est: si vero ponas, a vi finita continuo agente tempore infinitesimo produci celeritatem tantum infinitesimam secundi ordinis, similiter ostendam, a vi finita tempore finito non nisi celeritatem infinitesimam primi ordinis productum iri, quod aequè absurdum est: idem dicendum est de potentia finita velocitatem destruyente.

5) *In quacunque ratione distantiarum finitarum vis agat, tempusculo infinitesimo haberi potest pro constante.* Nam eo tempusculo non nisi celeritatem infinite parvam producit, vel destruit per praec. quæ si celeritati priori finitæ accedat, vel decedat, corpus eo tempusculo tamen describet spatium infinitesimum primi ordinis (num. 3): ergo distantiarum ratio non nisi infinite parum mutabitur; itaque manente eadem ratione distantiarum finitarum, eadem quoque & constans actio vis erit: idem intellige de vi agente in quacunque ratione celeritatum finitarum: hæ enim tempore infinite parvo nulla quantitate finita mutantur.

6) *In quacunque ratione distantiarum, aut velocitatum finitarum potentia agat, motus tempore infinite parvo haberi potest pro æquali:* cum enim eo tempusculo celeritati priori finitæ jam acquisitæ non nisi celeritas infinite par-

parva possit accedere, vel decedere (num. 4); motus fiet per vim inertiae secundum eandem celeritatem finitam.

* *Hæ sunt fundamentales illæ leges, quarum ope omnes species motuum, a quacunque vi producantur, definiendæ sunt: deduxi illas ex notionibus metaphysicis, quas de viribus, & celeritatibus nobis formamus, utique minus claris, ac distinctis, antequam ad sensum physicum transferantur, & amplissimus earum usus exemplis ostendatur.*

C A P U T II.

De Mensura physica Virium mechanicarum.



§. VIII.

Præ aliis viribus mihi considerata videtur vis inertiae (§. III), hæc non novos usque celeritatis gradus in corpore producit: sed aliunde jam acquisitos conservat, & corpus determinat, ut motu æquabili in directum feratur, donec a vi extranea de isto statu deturbetur: jam determinatio hujus vis ad percurrentia æqualia spatia inter æqualia temporum intervalla, quæ celeritas potentialis dicitur, a nobis nec distincte concipi, nec proprie mensurari potest: unde illi vulgo substituitur celeritas actualis tanquam externus effectus, seu relatio percurssi
spa.



spatii ad tempus, quo illud peragitur. Verum mea opinione nec celeritas ista actualis perspicue intelligetur, nisi exprimatur certa mensura spatii, quod a mobili intra datum tempus e. g. minutum secundum percurritur, vel percurreretur, nisi vis extranea accederet. Ita si corpus A intra secundum conficit 5 pedes motu æquabili, & corpus B eodem tempore 2 pedes, celeritas illius exprimi potest per spatium 5 pedum, & celeritas istius per 2 pedes: atque ita *generatim licet celeritatem corporis, per spatium intra minutum secundum motu æquabili percursum, vel percurrendum exprimere*: hoc ergo spatium pro mensura vis inertię, quæ actu in corpore datur, statui posse videtur.

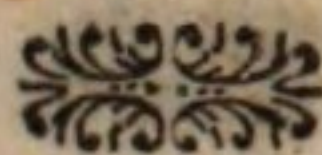
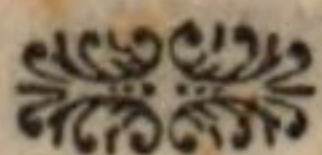
§. IX.

Si celeritas corporis motu æquabili latè multiplicetur per tempus, seu numerum secundorum, quibus motus durat, factum exprimit totum spatium a mobili confectum: si enim celeritas exprimatur mensura spatii, quod intra secundum a mobili percurritur, manifestum est, ut obtineatur spatium intra duo, aut tria secunda, aut quemvis numerum secundorum percurrendum, debere hanc mensuram toties accipi, quoties unitas, vel partes unitatis continentur in dato numero secundorum; hoc vero nihil aliud est, quam celeritatem mobilis multiplicare per tempus, seu numerum secundorum. Sit e. g. ea celeritas mobilis, ut intra
secun-



secundum conficiat 5 pedes : duret vero motus per horæ quadrantem, seu 900 secunda, corpus conficiet spatium æquale $5 \times 900 = 4500$ pedum.

* Si ergo celeritas mobilis ponatur $= C$, tempus, seu numerus secundorum, quibus motus durat $= T$; spatium confectum $= S$, erit $CT = S$: quæ expressio, si dicto modo sumatur, non tantum rationis, sed utriusque membri equalitatem omnimodam indicat, ut sensus sit. non solum spatia esse in ratione composita celeritatum, & temporum: verum etiam spatium a mobili confectum æquari spatio intra secundum percurso toties sumto, quot secundis motus durat: unde tempus instar coefficientis, seu numeri abstracti consideratur. Mechanici sæpe æquationum loco, formulis utuntur, quæ non equalitatem terminorum, sed similitudinem tantum rationis exhibent: ita si duo mobilia eodem tempore diversa spatia conficiunt, scribunt $C = S$; nam cum sit $S : s = CT : cT = C : c$, erunt in hoc casu celeritates in ratione spatiorum, atque hanc proportionem per formulam $C = S$ exhibent instar æquationis. Equidem non improbandum puto formularum usum: tyrones tamen cautos esse oportet, ne facile in errorem inducantur. Præterea, si æquationes retineantur, non raro animadverti, theoriam multo generalius pertractari, & faciliorem problematum solutionem reddi, quod eruditus lector ex pluribus exemplis deinceps adducendis intelligere poterit:

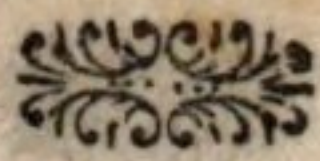


rit: ipsa autem reductio equationum ad formulas in dato casu, semper levi brachio peragitur, modo unitas loco quantitatum constantium, siquidem factores sint, substituatur: jam ut generalem, & absolutam virium extranearum quarumcunque mensuram determinemus, prius vim gravitatis terrestris ceu nobis notissimam expendamus; sic enim existimo: quemadmodum celeritas non nisi per spatium, ita vis & potentia quaecunque non nisi per pondus aliquod corporis terrestris, quod eundem cum vi effectum præstat, distincte exprimi, ac mensurari potest.

§. X.

Observatur 1) gravitatem prope superficiem telluris, qua omnia corpora ad descensum urgentur, *potentiam esse physice constantem*, nec mutatis ejusmodi distantis, in quibus experimenta capi solent, immutari. Experiri id poteris, si in vertice turris constitutus, corpus ad diversas altitudines ope fili demissum, per exactam bilancem (computato etiam fili pondere) examines: idem semper contrapon-
dium deprehendes. Erit adeo per totam altitudinem vis, & gravitas, qua corpus deorsum urgetur, eadem: idem multo magis ea ex ratione intelligitur, quod gravitas in corpore delabente in æqualibus temporum intervallis æqualia producat celeritatis incrementa: quippe

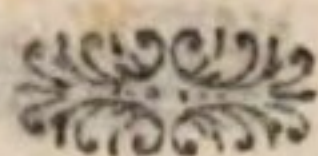
2) Si corpora sat gravia sub exiguo volumine ex diversis altitudinibus libere demittantur, obser-



observatur motum *continuo accelerari* ita, ut celeritates acquisitæ sint in ratione temporis descensus, & spatia ab initio motus computata proxime sint ut quadrata temporum, quibus decidunt; quod non omnino exacte ista ratio observetur, non immerito resistentiæ aeris, per quem corpora transeunt, tribuitur.

3) Accuratissimis experimentis, præsertim ope pendulorum deprehensum est, corpus vi gravitatis intra minutum secundum descendere per altitudinem 15.1038 pedum paris., quam mensuram desummi *ex recentiore tabula systematis solaris a cel. de la Lande Abregé d'Astronomie. confecta.*

4) Denique observatum est, vim gravitatis terrestris esse *massis, seu ponderibus corporum omnino proportionalem*: certe in vacuo corpora diversæ densitatis ex eadem altitudine eodem tempore, eademque celeritate descendunt: quod fieri non posset, nisi gravitas in singulas corporis molleculas æqualiter ageret, ac proin in massam duplam duplo, in triplam triplo plus; sicque omnes ad eandem celeritatem determinaret: unde etiam, si corpus grave per obicem a motu prohibeatur, pressionem in illum exerit, omnino massæ suæ proportionalem; & si duo corpora ex eadem altitudine, & proin æqualibus celeritatibus in obicem incidunt, vis percussionis quoque prorsus rationem massarum sequitur.



§. XI.

Unde manifesto deducuntur hæc confectaria.

1) Cum corpus per gravitatem terrestrem deorsum impulsus continuo motum acceleret, ut celeritates acquisitæ sint temporibus lapsus proportionales, atque ita a quiete per omnes gradus velocitatis ad quamcunque datam (si descensus spatium daretur, eademque vis perseveraret) perveniri possit, *nulla celeritas ut ut parva, aut magna excogitabitur, quam corpus per gravitatem terrestrem, & constantem non obtinere queat.*

2) Quoniam pressio, & percussio a corpore gravi exercita manente eadem celeritate ipsi massæ proportionalis est: massæ autem pro nostro concipiendi modo augeri, vel minui queant; *nulla pressio dabitur, cui non æqualem pondus corporis terrestris exerere possit: nulla quoque percussio, nullaque adeo vis quamcunque motus quantitatem produciens assignabitur, cui non æqualem pondus terrestre ex aliqua altitudine delapsum producere queat.*

3) Jam vero in ipso pondere corporis terrestris nil aliud deprehenditur, quam massa seu numerus particularum, quæ determinantur ad percurrendum dato tempore certum spatium: idcirco si vim quamcunque exprimamus per pondus terrestre, id est per aliquam massam a gravitate terrestri certa celeritate impulsam, quæ sua actione in massa alia eandem quantitatem motus efficit, quam data vis producit;

hæc



hæc mensura generalis, absoluta, ac omnino distincta erit.

* Eo igitur in casu particulari res devolvitur, ut ratio datæ vis ad gravitatem terrestrem rite determinetur: ita acturus de gravitate agente in ratione directâ massarum, & reciproca duplicata distantiarum, quæram imprimis distantiam, in qua vis attractiva illa æquatur gravitati terrestri: inventa hac distantia in quacunque alia mensura absoluta vis attractivæ habetur: similiter actio fluidorum, hominum & jumentorum in diversis ponderibus determinanda est: unde ipsa adplicatio generalis hujus theoriæ maximam ipsi lucem afferet, & insignem usum patefaciet.

§. XII.

His præmissis jam generales æquationes inter vim quamcunque, celeritatem, spatium, ac tempus pro motu tempore infinite parvo peracto invenire, easque distinctius explicare licet. Ponatur ergo 1) tempusculum infinite parvum $= dt$. Velocitas finita $= u$, ejus augmentum infinite parvum $= du$; spatiolum celeritate u tempore infinitesimo descriptum $= ds$: quoniam motus hoc tempusculo pro æquabili haberi debet, erit (per §. VII.

$$\text{IX) } u dt = ds; \text{ \& } dt = \frac{ds}{u}.$$

2) Potentia motum producens fit $= P$; massa corporis, in quod agit, $= M$. Cum
ergo



ergo productum ex potentia constante in tempus, quo agit, generatim fit, ut factum ex massa in celeritatem productam (§. VI): tempore autem infinite parvo quævis potentia pro constanti spectari possit (§. VII. n. 5), erit productum Pdt , ut factum Mdu : verum ut hæc formula jam omnia variabilia complectens, ad æquationem reducatur, multiplicemus potentiam per constantem $2g$ postea determinandam, & habebitur æquatio $2gPdt = Mdu$: quod si in ea loco dt subrogetur valor $\frac{ds}{u}$, fiet $2g$

$$\frac{Pds}{u} = Mdu; \text{ \& } 2gPds = Mudu.$$

3) Denique si æquatio $u dt = ds$ posito tempusculo dt pro constanti differentietur, erit $dudt = dds$; & $du = \frac{dds}{dt}$: hoc si substituat in æquatione num. præc. $2gPdt = Mdu$, invenietur $2gPdt^2 = Mdds$, quo exhibetur spatiolum infinitesimum secundi ordinis, quod tempore infinite parvo ob accedentem celeritatem infinitesimam describitur (§. VII. n. 2).

* *Istæ æquationes sunt maximi momenti per universam Mechanicam, ac si pro dato casu debitæ substitutiones fiant, facta æquationum integratione leges omnium motuum definiuntur, a quacunque potentia producantur: verum priusquam generalis hujus theoriæ usum exhibeam, allatarum æquationum sensum paucis*

cis declarare juvat: nam ut hæ formulæ veras æquationes exprimant, præ cæteris requiritur homogeneitas, seu ut æquationis membrum utrumque ex totidem factoribus homogeneis componatur. Quod primam attinet, $ds = u dt$, ea jam satis declarata est §. IX. in altera $2g P dt = M du$ membrum posterius $M du$ indicat factum ex massa M in differentiale celeritatis du , seu spatii intra minutum secundum percurrendi: quare membrum prius $2g P dt$ constabit ex factoribus homogeneis; nempe significabit productum, ex pondere vel massa P , cui data vis æquatur (§. præc.) ducta in spatiolum $2g dt$, quod tempusculo dt celeritate finita $2g$ a pondere P conficiatur (§. IX): quapropter factor constans adjectus $2g$ indicabit celeritatem, seu spatium intra minutum secundum motu æquabili a pondere terrestri, cui data vis æquatur, percurrendum: distinctius res ista patebit, ubi hanc constantem in exemplo gravitatis terrestris Cap. seq. determinaverimus: reliquæ æquationes ex his duabus deductæ sunt, nec alio explicatu egent. Cæterum negari vix poterit, hanc virium mechanicarum mensuram omnino physicam, ac sensibilem esse, ubi vires per pondera, celeritates per spatia, & tempora per numeros exhibentur, ut quisquis diligentius hæc secum reputat, mentemque ad supremum rerum omnium Opificem erigit, plane dicere debeat: Omnia in mensura, & numero, & pondere disposuisti. Sap. 11. v. 21.



CAPUT III.

De Mensura Virium constantium.

§. XIII.

Motus, qui actionem potentiæ constantis sequitur, *uniformiter acceleratus, vel retardatus* dicitur, prout vis inter æqualia temporum intervalia, æqualia velocitatis incrementa, vel decrementa producit: horum motuum leges jam facile inveniuntur: ac primo quidem *pro motu uniformiter accelerato*, si in æquatione generali §. præc. $2gPd t = Mdu$ potentia P constans sit, facta integratione, erit $2gPt = Mu$; cui integrali nulla quantitas constans adjicienda est, si initio temporis t corpus nullam habuisse celeritatem ponatur: jam in hac æquatione $2gPt = Mu$, factores $2g$, P , M in eodem mobili sunt constantes: quare erit t ut u , seu celeritates a vi constante productæ, sunt ut tempora, quibus producuntur.

2) Si æquatio generalis altera $2gPd s = Mdu$ §. præc. posita vi P constanti integretur, fiet $2gPs = \frac{Mu^2}{2}$, & $4gPs = Mu^2$.

Quare ob factores cæteros constantes, erit s ut u^2 , seu spatia ab initio motus confecta, sunt ut quadrata celeritatum.

3) Quoniam per num. 1. est $2gPt = Mu$; ac proinde $4g^2 P^2 t^2 = M^2 u^2$; & per n. præc. $4gPs = Mu^2$, seu $4gPMs = M^2 u^2$, fiet $4g^2 P^2 t^2 = 4gPMs$; seu $gPt^2 = Ms$: itaque erit t^2 , ut s , seu *spatia ab initio motus confecta, sunt pariter ut quadrata temporum.*

4) Cum tempora æquabiliter fluant, erunt ut 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & spatia ab initio motus confecta, ut 1, 4, 9, 16, 25, 36 &c. ergo *spatia singulis temporibus percursa, ut* 1. 4 — 1. 9 — 4. 16 — 9. 25 — 16. 36 — 25 &c. *seu erunt ut numeri impares* 1, 3, 5, 7, 9 &c.

5) Ex num. 1. est $2gPt = Mu$; ac proinde $2gP = \frac{Mu}{t}$. Et ex num. 2. habetur

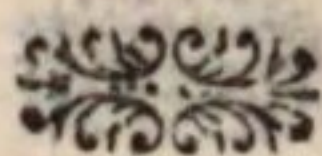
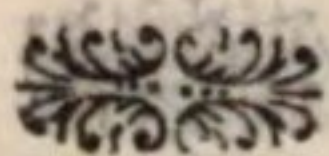
$$2gPs = \frac{Mu^2}{2}; \text{ facta substitutione erit } \frac{Mu}{t}s = \frac{Mu^2}{2}, \text{ \& } s = \frac{ut}{2}.$$

Idcirco spatium s motu uniformiter accelerato confectum est dimidium spatii ut, quod celeritate u in fine temporis t acquisita, eodem tempore t motu æquabili conficeretur §. IX.

6) Denique ex æquatione num. 3. $gPt^2 = Ms$, & $P = \frac{Ms}{gt^2}$ eruitur positis M & t

pro constantibus, vires constantes esse in ratione spatiorum, quæ eodem tempore conficiuntur.

225 226
227 228
229 230
231 232



§. XIV.

Si vis constans P fuerit ipsa *gravitas terrestris* expressa per pondus P : & massa movenda M fit hoc ipsum pondus P , uti contingit, si quodvis grave libere ex alto prope superficiem terræ delabatur, posito $P = M$, inventæ æquationes pro isto casu erunt $2gt = u$: & $4gs = u^2$; & $gt^2 = s$.

2) Si spatium s ponitur $= 15.1038$ ped. qui a corpore gravi prope superficiem terræ intra secundum $t = 1$ conficiuntur §. x, æquatio $gt^2 = s$ abit in hanc $g = s$: seu *constans factor* g æquatur *spatio*, quod corpus intra secundum vi gravitatis terrestris motu accelerato conficit: & quoniam motu æquabili celeritate in fine acquisita, duplum spatium eodem tempore percurritur (§. præc. n. 5), spatium $2g = 2s$ erit illud, quod a pondere terrestri vi a gravitate acquisita intra secundum motu æquabili conficeretur: seu indicat *celeritatem a gravitate terrestri intra secundum productam* (§. VIII). Prout supra jam §. XII. in nota adverti, ac nunc distinctius determinavi.

* Si detur quæcunque vis alia constans, quæ ad gravitatem terrestrem constantem rationem habeat e. g. $b : a$, æquationes omnes §phi XIII. sic facile reducentur: *gravitas terrestris* exponatur per P , & fiat $a : b = P :$
 $\frac{bP}{a}$; substituatur hic terminus $\frac{bP}{a}$ in æquationibus loco P ; & prima $2gPt = Mu$ evadet



$\det \frac{2gbPt}{a} = Mu$: tum si massa movenda
 fuerit ipsum pondus movens, posito $P = M$,
 erit $\frac{2gbt}{a} = u$; similiter æquatio altera
 $2gPs = \frac{Mu^2}{2}$, mutabitur in hanc $\frac{2gbs}{a} =$
 $\frac{u^2}{2}$. Atque ita pro quacunque vi constanti,
 cujus ratio ad gravitatem terrestrem nota est,
 leges motus determinari poterunt. Exemplum
 obvium habes in descensu corporum per plana
 inclinata, ubi vis respectiva plano parallela,
 est ad gravitatem absolutam, in constanti ra-
 tione altitudinis plani ad ejusdem longitudi-
 nem.

§. XV.

Ad motum uniformiter retardatum æqua-
 tiones generales §phi XII de motu acce-
 lerato inventæ, haud ægre transferentur, si
 incrementum velocitatis du pro decremento su-
 matur, adeoque signo negativo adficiatur; nam
 in motu retardato actio potentiæ adversari de-
 bet motui corporis; unde incrementum veloci-
 tatis, quod alias produceret, in decrementum
 prioris velocitatis abit. Itaque æquatio gene-
 ralis $2gPdt = Mdu$, mutabitur in hanc
 $2gPdt = -Mdu$: si jam vis P fuerit con-
 stans, & producat motum uniformiter retarda-
 tum, erit facta integratione, & adjecta con-
 stante



stante Q æquatio $2gPt = Q - Mu$. Ut constans Q definiatur, ponamus mobile initio temporis t contra actionem potentiæ fuisse projectum celeritate $= a$. Quare isto in casu erit $2gPt = 0 = Q - Ma$; & $Q = Ma$: proin integrale completum fiet $2gPt = Ma - Mu = M(a - u)$. Et si agatur de gravitate terrestri, ob $P = M$, habebitur $2gt = a - u$; & tempus erit, ut differentia celeritatis initialis a , & finalis u .

2) Altera æquatio generalis $2gPds = Mudu$ in motu retardato evadit $2gPds = -Mud$: & si potentia P sit constans, erit facta integratione $2gPs = Q - \frac{Mu^2}{2}$. Ut

constantem Q invenias, observa, initio spatii s celeritatem u poni $= a$: fiet ergo eo in loco $0 = Q - \frac{Ma^2}{2}$; & $Q = \frac{Ma^2}{2}$. Qua-

re integrale completum habetur $2gPs = \frac{M(a^2 - u^2)}{2}$; si vis constans fuerit ipsa gra-

vitatis $P = M$, erit $4gs = a^2 - u^2$. Generatim spatia motu retardato descripta, sunt ut differentiaë quadratorum velocitatis initialis, & finalis.

3) Si mobile eousque pervenisse ponatur, ut in ipso per actionem vis retardatricis omnis velocitas projectionis extincta sit, corpus nullam habebit velocitatem u residuam: idcirco si in repertis æquationibus fiat $u = 0$; fiet prima

$$2gPt$$

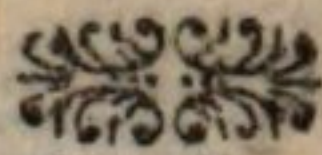
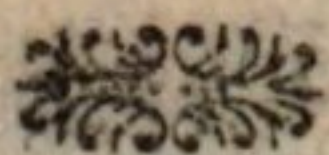
II II II
II II II
II II II
II II II



$2gPt = Ma$: altera $2gPs = \frac{Ma^2}{2}$: rede-
unt ergo æquationes omnes, quas §pho XIII
de motu uniformiter accelerato invenimus.

§. XVI.

Hæc quidem pertinent ad mensuram virium
constantium, præsertim gravitatis terre-
stris: etsi vero ea communem omnium virium
mensuram nobis suppeditet, in usu tamen ma-
chinarum, raro pondera pro potentiis motrici-
bus commode adhiberi possunt, prout P. Jos.
Walcher bene advertit num. 322. *Inhalt der*
Mechan. Colleg.; hinc unico exemplo formularum
adplicationem declaro. Fig. I. super trochleam
fixam *C* ducatur funis, cui appensa sint inæ-
qualia pondera *P* & *Q*, ita ut pondus majus
P suo descensu verticali alterum pondus minus
Q elevet: fingo autem trochleam esse lævissi-
mam, nullique frictioni, vel inertiae subjectam:
funiculi quoque pondus, & rigiditatem negligo:
erit itaque potentia movens in hoc casu non
nisi differentia ponderum, nempe $P - Q$:
massa autem mota est eorundem summa $P + Q$:
quare si in æquatione de vi constante inventa
(§. XIII. n. 2) $4gPs = Mu^2$, loco vis *P*
substituatur $P - Q$; & loco *M* massa $P + Q$,
erit in nostro casu $4gs(P - Q) = u^2(P + Q)$
similiter æquatio $gPt^2 = Ms$ (loc. cit. n. 3),
erit in nostro exemplo $gt^2(P - Q) =$
 $s(P + Q)$:



$s(P+Q)$: unde erit $t^2 = \frac{g(P-Q)}{s(P+Q)}$; &

$t = \sqrt{\frac{s(P+Q)}{g(P-Q)}}$. E. g. fit altitudo

s , per quam pondus Q est elevatum = 54 ped. pondus P sit 70 semiunc. & $Q = 68$ semiunc. porro est $g = 15.1038$ ped. (§. XIV).

Factis substitutionibus invenitur $t = 15''.7$.

* *Hac fere ratione D. Schoberus in puteo fodinarum salis anno 1746 frictionem exemplo avit: nequid gravitas chordæ turbaret, eam per utrumque cylindrum P & Q transmisit:*

& observavit tempus $t = 22'$, quo a cylindro graviore, levior per altitudinem 54 ped. elevabatur. Pondus P computato dimidiæ chordæ pondere erat 70 semiunc. & pondus Q cum pondere dimidiæ chordæ = 68 semiunc. Si jam frictio ponatur = F , debet loco potentie moventis $P - Q$ substitui vis $P - Q - F$.

Unde erit $t^2 = \frac{s(P+Q)}{g(P-Q-F)}$, & $gPt^2 - gQt^2 - gFt^2 = s(P+Q)$: facta reductione denique invenitur $P - Q - \frac{s(P+Q)}{gt^2}$

= $F = 0.981$ proxime = semiuncia. Vide Mech. P. Car. Scherffer num. 270.

CAPUT IV.

De Mensura Virium variabilium.

§. XVII.

In amplissimo hoc argumento id tantum agam, ut quibusdam exemplis allatæ theoriæ adplicationem ostendam: ea autem mihi felegi, quorum usus in Physica est: nempe vim agentem vel in ratione directâ distantiarum, vel ratione reciproca duplicata earundem: aut vim resistentem in ratione duplicata celeritatum: & quoniam de viribus attractivis nobis sermo erit, præ cæteris mihi explicandum videtur, quid nomine attractionis veniat, quæve illius mensura statui queat.

I) Per *attractionem*, prout in corpore attracto datur, nihil aliud intelligo, quam celeritatem illam potentialem corpori a massa attrahente intra datum tempus communicatam: ita si quæeratur, quanta vi attrahatur corpus prope superficiem terræ? respondeo, ea, ut in ipso intra secundum tanta celeritas a terra attrahente producat, qua deinceps motu æquali posset conficere duplum spatium 15. 1038 pedum. Similiter per vim attractivam, qua corpus e. g. in superficie Solis positum, ad ejus centrum tendit, intelligitur illa celeritas a Sole attrahente dato tempore in corpore producta: atque in hoc sensu attractio dici solet *vis accelerata*.



leratrix, quæ est ipsa celeritas, ad quam singulæ partes corporis a vi extranea determinantur.

2) Per attractionem potest intelligi ipsa *vis attrahens*, & *celeritatem in corpore attracto produciens*: & hujus quidem mensura absoluta exprimi potest per aliquod pondus corporis terrestris: ita vim attrahentem, qua terra deorsum trahit quodvis corpus grave, exprimere licet per certum, ac determinatum aliquod pondus: unde si cognita fuerit ratio inter vim attrahentem aliam, & gravitatem terrestrem, ejusdem vis attractivæ ratio in mensura ponderis exhiberi poterit.

3) Ostendit autem Newtonus Lib. i. prop. 76. Princ Math., quod si puncta agant in ratione reciproca duplicata distantiarum, *vis attrahens spherarum in eadem a centro distantia similium, sit in ratione directa massarum, quam habent spheræ attrahentes, & reciproca duplicata distantiarum corporis attracti a centro spherarum.* Sit ergo massa Solis = M , massa terræ = m . Corpus a Sole attractum distet ab illius centro intervallo = h . Et corpus a terra attractum sit in ipsius superficie, & distet a centro, semidiametro terræ = r . Vis attrahens terræ exprimatur per pondus, vel massam P ; fiat jam $\frac{m}{r^2} : \frac{M}{h^2} = P : \frac{Mr^2}{mh^2} P$: hic 4tus terminus exprimet vim attrahentem Solis in distantia ab eodem = h .

4) Si jam quæeratur illa distantia h , in qua vis attrahens Solis, æquatur vi attrahenti terræ, erit eo in casu $P = \frac{M r^2 P}{m h^2}$. Et $h^2 =$

$$\frac{M r^2}{m}. \text{ Demum } h = r \sqrt{\frac{M}{m}}. \text{ Si jam hæc}$$

quæstio de diversis viribus attrahentibus, quas e. g. Sol, Jupiter, Saturnus &c. exerunt, institueretur, ob factores r & m constantes, patet illas *distantias* h , in quibus vis attrahens æquatur gravitati terrestri, esse, ut $\sqrt{M}$ seu in ratione subduplicata massarum attrahentium. Secundum Landium est massa terræ ad massam Solis, seu $m : M = 1 : 352802$: unde invenitur distantia $h = 594$ semidiametris terræ proxime: quodsi corpus aliquod existeret in ipsa superficie Solis, in formula vis attrahentis loco h substituo semidiametrum Solis, quam voco R : eritque vis attrahens eo in loco

$$= \frac{M r^2 P}{m R^2}. \text{ Secundum Landium est } r : R$$

$= 1 : 111.48$, quo substituto, erit vis attrahens $= 28.38 P$. Unde si vis attrahens terræ exponatur per $P = 100$ lb. Vis attrahens Solis erit 2838 lb. Erit igitur gravitas terrestris ad gravitatem in superficie Solis $= 100 : 2838$: & quoniam in exiguis a superficie distantis (respectu semidiametrorum sphaerarum) vis attrahens sensibilibiter non mutatur, in eadem ratione erunt celeritates a gravitate terrestri, & solari eodem tempore productæ §. VI,

&



& spatia eodem tempore confecta §. XIII.
num. 6.

§. XVIII.

Ut jam rem ipsam adgrediar, fit Fig. II. in C centrum potentiae attrahentis corpus P in quacunque ratione distantiarum PC , quam exponens $= n$ indicet, & quæramus motum corporis, qui ex actione hujus potentiae consequitur. In distantia AC fit actio potentiae æqualis gravitati terrestri P , fitque $AC = h$. Initio motus corpus fit in B , ubi est $BC = a$. Facto descensu per BP , distantia PC a centro virium fit $= s$. Et elementum spatii $Pp = -ds$, quod ea ex ratione signo negativo adficio, quia per actionem potentiae attrahentis distantia s minuitur: fiat jam ana-

logia $h^n : s^n = P : \frac{Ps^n}{h^n}$; erit hæc potentia

corpus in puncto P sollicitans: cum jam tempore infinite parvo omnis potentia pro constanti haberi possit, substituatur in æquatione generali $2gPds = Mdu$ §. XII. loco P po-

tentia $\frac{Ps^n}{h^n}$; eritque $-\frac{2gs^n Pds}{h^n} = Mdu$:

ipsum autem pondus corporis terrestris poni potest æquale ipsi massæ M : unde erit $-\frac{2gs^n ds}{h^n} = udu$. Facta integration, & adje-

cta constante Q , habetur $Q \frac{-2gs}{(n+1)h^n} = \frac{u^2}{2}$.

Ut vero constans Q determinetur, observa, initio motus in B , ubi est $s = a$, celeritatem

$$u \text{ poni} = 0: \text{ unde eo in loco erit } Q = \frac{-2ga}{(n+1)h^n}$$

$$= 0. \text{ Et } Q = \frac{2ga}{(n+1)h^n}. \text{ Quare integrale}$$

$$\text{completum fiet } \frac{2ga}{h^n(n+1)} - \frac{2gs}{h^n(n+1)} = \frac{u^2}{2}. \text{ Et}$$

$$u = 2 \sqrt{\left(\frac{g(a^{n+1} - s^{n+1})}{h^n(n+1)} \right)}, \text{ ad deter-}$$

$$\text{minandum tempus motus, adhibenda est æquatio}$$

$$dt = \frac{ds}{u} \text{ §. cit., \& in nostro casu erit } t = \int \frac{-ds}{u} = Q + \int \frac{-ds}{\sqrt{\left(\frac{h^n(n+1)}{4g} (a^{n+1} - s^{n+1}) \right)}} \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{h^n(n+1)}{4g} \right)}. \text{ Jam descendamus ad casus}$$

particulares.

§. XIX.

Agat vis in *ratione directa simplici distan-*
tiarum, erit $n = 1$. Et celeritas $u =$

$$\sqrt{\left(\frac{2g(a^2 - s^2)}{h} \right)} \text{ Tempus autem } t = Q + \int \frac{-ads}{\sqrt{(a^2 - s^2)}} \times \sqrt{\frac{h}{2ga^2}}, \text{ cujus integra-}$$

tio pendet a rectificatione circuli. Describatur
Fig.



Fig. III. radio $CB = a$ quadrans BCD , posita abscissa $CP = s$, erit $PM = \sqrt{(a^2 - s^2)}$. Ducatur ordinata pN infinite propinqua ad PM ; & Mr ad Pp parallela, erunt triangu-
la pCN , rMN similia, & $pN:CN = Mr$
: MN ; seu $\sqrt{(a^2 - s^2)} : a = ds : \frac{ads}{\sqrt{(a^2 - s^2)}}$
 $= MN$. Quare erit summa omnium $MN =$
 $\int \frac{-ads}{\sqrt{(a^2 - s^2)}} = -$ arcui MD : ac proinde

tempus $t = Q - MD \sqrt{\frac{h}{2ga^2}}$. Ad defi-

niendam constantem Q , pono tempus $t = 0$; & in motus initio arcus MD æquabitur qua-
dranti BMD , eritque $t = 0 = Q - BMD$

$\times \sqrt{\frac{h}{2ga^2}}$. Ergo $Q = BMD \sqrt{\frac{h}{2ga^2}}$;

atque integrale completum $t = (BMD -$
 $MD) \sqrt{\frac{h}{2ga^2}} = BM \sqrt{\frac{h}{2ga^2}}$: denique

si corpus descenderet usque in C , arcus BM
abiret in quadrantem BMD , & tempus de-

scensus per BC erit $t = BMD \sqrt{\frac{h}{2ga^2}}$.

Sit radius ad peripheriam $= r : p$; erit $\frac{ap}{4r}$

quadrans radii a ; & tempus descensus usque

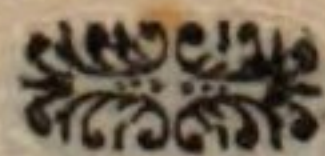
ad $C = \frac{ap}{4r} \sqrt{\frac{h}{2ga^2}} = \frac{p}{4r} \sqrt{\frac{h}{2g}}$: unde

mani-



manifestum est, tempus descensus usque in centrum virium C neutiquam pendere a distantia initiali $BC = a$, ex qua corpus descendit: proin in hac hypothese corpus ex quacunque distantia eodem tempore ad centrum virium descendet. Vicissim autem dato tempore descensus $t = \frac{1}{2}$ secundo, invenire licet spatium h , in cujus initio vis agens in ratione directa distantiarum, vel spatiorum ab aliquo centro æquatur gravitati terrestri: erit enim $t^2 = \frac{p^2 h}{32 r^2 g}$; & $\frac{32 r^2 t^2 g}{p^2} = h$. Ponatur $2r = 113$. $p = 355$. $t = \frac{1}{2}$. $g = 15 \cdot 1038$, erit $h = 3 \cdot 0606$ pedes.

* Eruditus lector facile advertet insignem hujus theoriæ usum in descensu corporis per arcum cycloidis, ubi ostenditur, vim, qua corpus per illius arcum descendit, esse in ratione directa spatiorum usque ad punctum infimum percurrendorum: unde per quemvis arcum descensus fiet eodem tempore: porro in cycloidis initio directio tangentis, ac vis est perpendicularis ad horizontem, & æquatur ibi vis ipsi gravitati terrestri: arcus autem h percurrendus est semicyclois dupla diametri circuli genitoris, seu æqualis longitudini penduli intra cycloides oscillantis: ergo longitudo hujus penduli, cujus semioscillatio duret $\frac{1}{2}$ secundo, & tota uno secundo, erit $= h = 3 \cdot 0606$ pedum. Dissertationis angustiae non admittunt, ut pluribus ista declarem.



§. XX.

Agat vis attrahens *in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium*, posito $n = -2$, æquatio §pho XVIII inventa,

ta, evadet $u = 2 \sqrt{\left(\frac{g(a^{-1} - s^{-1})}{-h^{-2}} \right)} = 2$

$\sqrt{\left(\frac{gh^2(a-s)}{as} \right)}$ Tempus autem $t = Q +$

$\int \frac{-s^{\frac{1}{2}} ds}{\sqrt{(a-s)}} \sqrt{\frac{a}{4gh^2}}$: compendii gratia factor

constans $\sqrt{\frac{a}{4gh^2}}$ fit $= f$, erit $t = Q +$

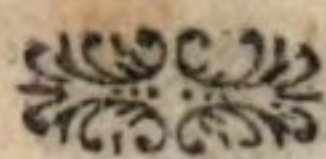
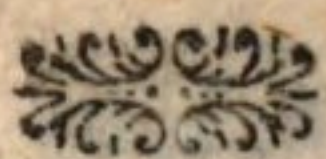
$\int \frac{-f s ds}{\sqrt{(as-s^2)}} = Q + f \sqrt{(as-s^2)} + \int \frac{-\frac{1}{2} a f ds}{\sqrt{(as-s^2)}}$

ut patebit, si hoc integrale rursus differentietur: partis ultimæ integratio pendet a rectificatione circuli. Fig. IV. diametro $BC = a$ describatur circulus BMC : posita abscissa $CP = s$, erit ordinata $PM = \sqrt{(as-s^2)}$: ducta pm illi infinite propinqua, & mr ad Pp parallela, est $PM:RM = mr:Mm$; &

$Mm = \frac{\frac{1}{2} a ds}{\sqrt{(as-s^2)}}$, & summa omnium Mm

erit arcus MC : quare integrale temporis evadet $t = Q + f \times PM - f \times CM$: ut constans Q determinetur, adverte, posito $t = 0$, fieri $CP = CB$, & $PM = 0$; arcum vero CM æquari toti semiperipheriæ BMC :

quare



quare eo in casu est $t = b = Q - f \times BMC$,
 & $Q = f \times BMC$: itaque integrale completum
 erit $t = f \times PM + f \times BMC - f \times CM =$
 $(PM + BM) f = (PM + BM)$

$\sqrt{\left(\frac{a}{4gh^2}\right)}$. Si corpus usque ad centrum
 virium C cadat; evanescet PM , & arcus BM
 æquabitur semiperipheriæ BMC : unde si ra-
 dius ad peripheriam sit, ut $r : p$; erit semipe-
 ripheria $BMC = \frac{ap}{4r}$; & tempus descensus

$$= \frac{ap}{8rh} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

* Quærat^{ur} e. g. quo tempore Luna ces-
 sante vi tangentiali in centrum terræ delabere-
 tur, agente gravitate in ratione reciproca du-
 plicata distantiarum: erit h distantia, in qua
 vis æquatur gravitati terrestri prope illius su-
 perficiem, æqualis semidiametro terræ =
 $1432\frac{1}{2}$ Leucis secundum Cel. de la Lande:
 una autem Leuca habet 2283 hexap. Paris.
 facta reductione ad pedes erit $h = 19622385$
 ped. & distantia media Lunæ a terra = $a =$
 1217204280 ped. & $g = 15.1038$. His sub-

stitutis erit $t = 437362'' = 5 \text{ d. } 1 \text{ h. } 29' . 22''$.
 Si quærat^{ur} tempus descensus Lunæ usque ad
 superficiem terræ, erit distantia finalis $s = h$,
 & resolvenda erit æquatio $t = (PM + BM)$

$\sqrt{\left(\frac{a}{4gh^2}\right)}$. Calculo valde molesto inve-
 ni hoc tempus = $5 \text{ d. } 1 \text{ h. } 23' . 27''$.

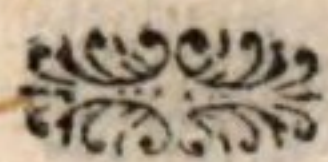


§. XXI.

Ut etiam exemplum adferam de vi retardatrice variabili, examinabo *lapsum verticalem corporis in aere homogeneo prope superficiem terræ*: verum cum theoria de resistentia medii etiamnum valde imperfecta, multisque controversiis obnoxia sit, supponam generatim, *absolutam aeris resistentiam equari parti, vel multiplo k ponderis cylindri aerei, qui pro basi habet circulum maximum globi, & pro altitudine spatium, per quod descendens globus in vacuo a gravitate terrestri impulsus suam celeritatem acquireret.*

1) Sit ergo radius globi in mensura pedis $= a$. Radius ad peripheriam $= r : p$; erit circulus maximus globi $= \frac{a^2 p}{2r}$: celeritas, qua actu movetur, sit $= u$: erit per §. XIV spatium s , in cuius descensu hæc celeritas acquireretur $= \frac{u^2}{4g}$: unde erit volumen dicti cylindri aerei $= \frac{a^2 u^2 p}{8 g r}$: & si pondus pedis cubici aeris sit $= n$, erit pondus cylindri $= \frac{a^2 u^2 p n}{8 g r}$: & denique resistentia aeris $= \frac{a^2 u^2 p n k}{8 g r}$.

2) Dum corpus solidum per fluidum movetur, non agit in illud vi toti suo ponderi proportion-



portionali; tantum enim sui ponderis amittit, quantum pondus habet volumen æquale fluidi: jam volumen sphæræ, cujus radius $= a$, est

$$= \frac{2 a^3 p}{3 r} : \text{ \& si pondus pedis cubici mate-}$$

riæ, ex qua globus constat, fit $= m$, erit

$$\text{pondus globi} = \frac{2 a^3 p m}{3 r} ; \text{ \& pondus fluidi}$$

$$\text{sub eodem volumine} = \frac{2 a^3 p n}{3 r} : \text{ proin dif-}$$

$$\text{ferentia horum ponderum} \frac{2 a^3 p}{3 r} (m - n) \text{ ex-}$$

primet pondus respectivum, quod præsentī in casu duntaxat spectandum est.

3) Ut jam æquatio generalis §. XII. $2 g P d s = M u d u$ rite adplicetur, loco vis P deorsum agentis, substituenda est differentia inter

$$\text{pondus deorsum urgens} \frac{2 a^3 p}{3 r} (m - n) ; \text{ ac}$$

$$\text{resistentiam medii} = \frac{a^2 u^2 p n k}{8 g r} , \text{ \& loco}$$

massæ movendæ M , similiter tantum pondus

$$\text{respectivum} \frac{2 a^3 p}{3 r} (m - n) : \text{ his substitutis}$$

$$\text{prodit æquatio} 2 g d s \left(\frac{2 a^3 p}{3 r} \cdot m - n - \right.$$

$$\left. \frac{a^2 u^2 p n k}{8 g r} \right) = \frac{2 a^3 p}{3 r} (m - n) u d u ; \text{ seu}$$



$$2gds \left(\frac{2a}{3} \cdot m - n - \frac{nu^2 k}{8g} \right) = \frac{2a}{3} (m - n) u du.$$

4) Compendii gratia pono $\frac{2a}{3} (m - n) = b^2$, eritque $2gds \left(b^2 - \frac{nu^2 k}{8g} \right) = b^2 u du$:

& $ds = \frac{4b^2 u du}{8gb^2 - nu^2 k}$. Hoc, ut integretur, fiat $8gb^2 - nu^2 k = x^2$; eritque $nk u du = x dx$, & $u du = \frac{-x dx}{nk}$. Un-

de $ds = \frac{-4b^2 dx}{nk x}$: quod differentiale est logarithmicum: facta integratione, & adjecta

constante Q , prodit $s = Q - \frac{4b^2}{nk} \text{Log. } x =$

$Q - \frac{2b^2}{nk} \text{Log. } x^2 = Q - \frac{2b^2}{nk} \text{Log.}$

$(8gb^2 - nk u^2)$. Ut constans Q determine-
tur, pono initio lapsus, ubi est $s = 0$, etiam
velocitatem u evanescere, eritque eo in loco

$0 = Q - \frac{2b^2}{nk} \text{Log. } 8gb^2$: & $Q = \frac{2b^2}{n}$

$\text{Log. } 8gb^2$. Et integrale completum, erit

$s = \frac{2b^2}{nk} \text{Log. } 8gb^2 - \frac{2b^2}{nk} \text{Log. } (8gb^2$

$- nk u^2) = \frac{2b^2}{nk} \text{Log. } \frac{8gb^2}{(8gb^2 - nk u^2)}.$

5) Ut jam ex dato spatio descensus s inveniatur velocitas u , fit h numerus, cujus logarithmus naturalis æquatur unitati, seu Log.

$$h = 1. \quad \text{Eritque } s \text{ Log. } h = \frac{2b^2}{nk} \text{ Log.}$$

$$\frac{8gb^2}{8gb^2 - nku^2} : \text{ seu } \frac{nk s}{2b^2} \text{ Log. } h = \text{Log.}$$

$$\frac{8gb^2}{8gb^2 - nku^2} : \text{ \& facto regressu ad numeros}$$

$$\text{erit } h \frac{nk s}{2b^2} = \frac{8gb^2}{8gb^2 - nku^2} : \text{ \& } h \frac{nk s}{2b^2}$$

$$(8gb^2 - nku^2) = 8gb^2 : \text{ demum } \frac{8gb^2}{nk}$$

$$\left(1 - \frac{\frac{1}{nk s}}{h \frac{2b^2}{nk}} \right) = u^2.$$

6) Ad definiendum tempus t , valor $ds =$

$$\frac{4b^2 u du}{8gb^2 - nku^2} \text{ num. 4. substituatur in æqua-}$$

$$\text{tione generali } dt = \frac{ds}{u}, \text{ eritque } dt =$$

$$\frac{4b^2 du}{8gb^2 - nku^2} = \frac{\frac{4b^2 du}{nk}}{\frac{8gb^2 - u^2}{nk}}. \text{ Sit } \frac{8gb^2}{nk} =$$



$$f^2. \text{ Eritque } dt = \frac{4b^2 du}{nk(f^2 - u^2)} = \frac{2b^2 du}{nkf(f+u)}$$

$$+ \frac{2b^2 du}{nkf(f-u)}, \text{ cujus integrale est } t =$$

$$\frac{2b^2}{nkf} \text{Log. } f+u - \frac{2b^2}{nkf} \text{Log. } (f-u) =$$

$$\frac{2b^2}{nfk} \text{Leg. } \frac{f+u}{f-u}. \text{ Quantitas constans adjicienda evanescit. Est vero } u = \sqrt{\left(\frac{8gb^2}{nk}\right)}$$

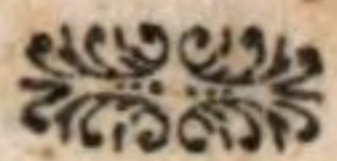
$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\frac{h}{2b^2} \frac{1}{nks}}\right)}, \text{ seu si ponatur } 1 - \frac{1}{\frac{h}{2b^2} \frac{1}{nks}}$$

$$= R^2, \text{ erit } u = fR: \text{ unde fiet tempus } t = \frac{2b^2}{nfk} \text{Log. } \frac{1+R}{1-R}.$$

7) Eulerus in sua Mechanica adducit sequens exemplum: globus chartaceus diam. 28.8 lin. Rhenol. & proin radii $a = 0.1$ ped. Rhen. est demissus ex altitudine $s = 120.814$ ped. pondus globi, ad pondus aeris, seu $m:n = 144.14:3.14$. Spatium g in hac mensura est $= 15.625$ ped., coefficientem k ponam

$$= 1, \text{ invenietur } b^2 = 9.4, \text{ \& } f^2 = \frac{8gb^2}{nk}$$

$$= 374.203821656 \text{ } f = 19.34434857 \cdot \frac{1}{nks}$$



$$\frac{nks}{2b^2} = 20.1785085: \text{hic numerus divida-}$$

tur per 2.30258509; quotus 8.7634149059
dat logarithmum tabularem, cui respondet nu-

$$\text{merus} = \frac{nks}{h \cdot 2b^2} = 579982517.8905; \text{un-}$$

$$\text{de } R = 0.9999999999137. \text{ Et } \frac{1+R}{1-R} =$$

2317497102, cui respondet logarithmus tab.
= 9.3650192. Hic ductus in 2.30258509,

$$\text{dat log. hyp. Log. } \frac{1+R}{1-R} = 21.5637536.$$

Et tempus $t = 6''.673$; observatio autem de-

dit $5''$. Unde resistantia assumitur paulo major
vera, si ponatur æqualis ponderi cylindri flui-
di, cujus basis æquatur circulo maximo globi:
altitudo autem spatium totum, in cujus descensu
acquiritur globi velocitas.

* Si corpus contra directionem gravitatis
sursum verticaliter in aere projiceretur, simul
gravitas, & resistantia medi; motum retarda-
rent: unde loco vis P, ponenda esset potentia

$$\text{resistens} = \frac{2a^3 p}{3r} (m - n) + \frac{a^2 p n k u^2}{8gr}; \text{ \&}$$

$$\text{loco M, ut prius } \frac{2a^3 p}{3r} (m - n): \text{ verum}$$

loco incrementi du substituendum est decre-
mentum $-du$: unde pro hoc casu erit aqua-
tio



$$\text{tio } 2 g d s \left(\frac{2 a^3 p}{3 r} \cdot (m - n) + \frac{a^2 p n u^2 k}{8 g r} \right)$$

$$= - \frac{2 a^3 p}{3 r} (m - n) u d u. \text{ Si rursus ponatur } \frac{2 a}{3}$$

$(m - n) = b^2$, & celeritas initialis, qua corpus sursum projicitur $= c$. Facta reductione

$$\text{invenietur } s = \frac{2 b^2}{n k} \text{ Log. } \left(\frac{8 g b^2 + n k c^2}{8 g b^2 + n k u^2} \right)$$

Determinatio autem temporis pendet in hoc casu a quadratura circuli. Vide Comment. in Newt. Princ. Math. L. II. n. 106.

** Ad vires variabiles etiam pertinent vires repulsivæ, quæ se in minimis distantiiis exerunt: exempli loco ostendam, quomodo ex ejusmodi viribus, quacunque ratione distantiarum agentibus notæ conflictuum leges consequi possint, siquidem per eas conflictus peragere-
tur: imprimis concipere oportet in distantia illa minima, qua vires repulsivæ agunt, quandam potentiam P inter corpora sibi occurrentia interponi, quæ directione contraria utrumque a se remove conetur, ac proin in incurrente celeritatem minuat, in impulso vero augeat: sint massæ corporum M, m , celeritates ante conflictum C, c : per conflictum acqui-
sitæ U, u : elementum celeritatis tempusculo dt in massa M destructum $= - d U$, & productum in massa $m = d u$. Jam æquatio generalis §. XII. $2 g P dt = M d u$ fiet respectu corporis impellentis $2 g P dt = M d U$, & re-
spectu

specū impulsi $2gPdt = mdu$: quia ergo in
massam utramque eodem tempore vis eadem P
agit, erit $MdU = mdu$; & facta inte-
gratione habetur $Q - MU = mu$: ut con-
stans Q determinetur, observa, ante confli-
ctum celeritates esse C, c: unde erit eo in ca-
su $Q - MC = mc$. Et $Q = MC + mc$;
 & integrale completum erit $MC + mc =$
 $MU + mu$; seu summa quantitatum motus
ante conflictum, æquatur summæ quantitatum
motus post conflictum: porro si productis ve-
locitatibus U, u non succedat vis alia e.g. ela-
stica, potentia P tamdiu aget, donec utrum-
que corpus ad æqualem celeritatem fuerit de-
terminatum: tum enim unum corpus non jam
impediet motum alterius; hoc ergo in casu erit
 $U = u$; & $\frac{MC + mc}{M + m} = U$, quæ est vulga-
ris formula de celeritate communi post confli-
ctum in corporibus non elasticis: verum non
opus esse existimo, ut ad leges conflictus de-
terminandas ad hanc virium mensuram confu-
giatur.

CAPUT V.

De Mensura Virium centralium.



§. XXII.

Notum est ex Physica, motum curvilineum,
 qui a corpore circa aliquod centrum vi-
 rium



rium peragitur, ubique compositum esse ex vi duplici, nempe *tangentiali*, & *centripeta*: quæ communi nomine *centrales* dicuntur. Pro diversa harum virium tam ratione, quam directione variæ describuntur curvæ: jam expendam primo generales adfectiones motus curvilinei: inde resolvam *problema inversum virium centralium*, quo data ratione virium centralium curva investigatur, quæ iis describi potest: denique ad *problema directum* descendam, ac in circulo, ellipsi, ac parabola rationem virium centralium quæram.

§. XXIII.

Projiciatur corpus Fig. V. directione AE per centrum virium attrahentium C non transeunte: tempore t percurratur arcus $AM = s$, & tempusculo dt elementum arcus, vel tangentis $MT = ds$. Celeritas, quam corpus in M habet directione MT fit $= u$. Porro ducatur ex C in tangentem MS perpendicularum CS , & ex T perpendicularis TR ad radium vectorem MC , eruntque triangula rectangula TMR , MSC communem angulum TMR habentia, similia: demum fiat Tq ad SC parallela, & triangula quoque MTq , MSu erunt similia. Sit jam

1) CM seu radius vector $= y$. Perpendicularum $cs = r$. Erit $MR = dy$. Vis centripeta $= P$. Ut autem inveniatur, quantum ex actione hujus vis directione MC agentis,

tis,



tis, celeritas tangentialis u mutetur, fiat analogia; vis P agens directione MC , est ad suum effectum in directione MT , ut $MC : MS$ (seu ob sim. triang. CMS , TMR) $= TM : MR$; ergo erit $ds : dy = P : \frac{Pdy}{ds}$. Hæc

erit vis corpus sollicitans directione tangentis MT , & velocitatem u elemento du augens, vel imminuens: substituatur hæc potentia loco P in æquatione generali § XII. $2gPds = Mudu$; fiet $2gPdy = Mudu$: quia tamen vires centripetæ in natura ita fere comparatæ sunt, ut decrefcentibus distantiiis y crescat celeritas; elementum dy signo negativo adficio, & habebitur $-2gPdy = Mudu$.

2) Si motus referatur ad centrum virium C , & quæeratur recessus a tangente Tq infinitesimus secundi ordinis, quem vis centripeta tempusculo infinite parvo sua actione efficit (§. VII); fiat analogia: vis P in directione MC , est ad suum effectum in directione SC ,

ut $MC : SC$; seu $y : r = P : \frac{rP}{y}$, cui æqua-

tur vis agens directione Tq ad SC parallela: porro producatur latus curvæ Mq in u , erit $su = dr$ differentiale perpendiculi SC ; est autem $MT : MR = CM : MS$, seu $ds :$

$dy = y : \frac{ydy}{ds} = MS$. Et $MS : MT =$

$Su : Tq$; seu $\frac{ydy}{ds} : ds = dr : \frac{drds^2}{ydy} =$



Tq ; itaque si in æquatione generali §. XII.
 $dds = \frac{2gPdt^2}{M}$, exprimente spatiolum infi-

nitesimum secundi ordinis per actionem poten-
 tiæ confectum, substituatur $\frac{rP}{y}$ loco P , &

Tq loco dds , prodit æquatio $\frac{2grPdt^2}{My}$
 $= \frac{drds^2}{ydy}$: est autem generatim $dt = \frac{ds}{u}$;

& $dt^2 = \frac{ds^2}{u^2}$, quo subrogato deducitur

$\frac{2grPds^2}{Myu^2} = \frac{drds^2}{ydy}$; seu $2grPdy =$
 $Mu^2 dr$.

§. XXIV.

Inde fluunt hæc confectaria. 1) Si æquatio
 prior — $2gPdy = Mu^2 dr$ multiplice-
 tur per alteram $Mu^2 dr = 2grPdy$, repe-
 rietur — $u dr = r du$; & $r du + u dr = 0$.
 Ut constans adjecta Q determinetur, ponamus
 corpus in A existens, habere celeritatem $= c$;
 & perpendiculum CE esse $= f$: idcirco erit
 illo in casu $cf + Q = 0$: adeoque $Q = -$
 cf . Et generatim fiet $ur - cf = 0$; seu
 $u : c = f : r$; ex quo patet, celeritates cor-
 poris in quacunque curva moti esse in ratione
 reciproca simplici perpendiculorum, quæ ex
 centro virium in tangentes demittuntur.

2)



2) Multiplicetur æquatio $ur = cf$ per æquationem generalem $ds = udt$, fiet $rds = cfdt$: ponatur perpendicularis $TR = dx$: cum fit $CM : CS = TM : TR$, erit $y : r = ds : dx$; adeoque $rds = ydx = cfdt$, & facta integratione obtinetur $\int ydx = cft$: est autem $ydx = cM \times TR =$ duplo Trianguli TCM , seu differentiale dupli spatii CAM a radio vectore tempore t descripti: quare si hæc area dicatur $= A$, erit $\int ydx =$
 $2A = cft$: & $A = \frac{cf}{2}t$. Quapropter ob

factorem $\frac{cf}{2}$ constantem, erunt areæ a radio vectore descriptæ, ut tempora t , quibus describuntur.

§. XXV.

*N*am generalem solutionem problematis inversi virium centralium exhibere licet. Data ratio distantiarum, quam vis centripeta agendo sequitur, fit $= n$. Distantia, in qua vis centripeta æquatur gravitati terrestri P , $= h$. Fiat analogia $h^n : y^n = P : \frac{y^n P}{h^n}$. Si hæc vis loco P in æquatione generali §. XXIII. — $2gPdy = M u du$ substituatur, erit — $2gy^n dy = h^n M u du$: vim autem gravitatis terrestri P exprimere licet per ipsam massam motam M ; quare posito $P = M$, erit — $2gy^n dy = h^n u du$, cujus integrale est Q —



$$Q - \frac{2gy^{n+1}}{n+1} = \frac{h^n u^2}{2}. \text{ Ut constans } Q \text{ de-}$$

finiatur, ponamus in distantia $= 2a$ celeritatem tangentialem u ex actione vis centripetæ omnino destrui: idcirco erit in eo casu $Q - \frac{2g(2a)^{n+1}}{n+1} = 0$; & $Q = \frac{2g(2a)^{n+1}}{n+1}$

ac integrale completum evadet

$$\frac{2g(2a)^{n+1} - 2gy^{n+1}}{n+1} = \frac{h^n u^2}{2}; \text{ \& } u^2 =$$

$$\frac{4g(2a)^{n+1} - 4gy^{n+1}}{(n+1)h^n}.$$

2) In vertice curvæ A , perpendicularum EC cum distantia AC congruat, sitque $= f$; & celeritas in $A = c$. Quare hoc in loco æ-

quatio erit $\frac{2g(2a)^{n+1} - 2gf^{n+1}}{n+1} =$

$$\frac{h^n c^2}{2}; \text{ unde } c^2 = \frac{4g(2a)^{n+1} - 4gf^{n+1}}{(n+1)h^n}$$

Est autem per §. præc. generatim $ur = cf$, &

$\frac{c^2 f^2}{r^2} = u^2$. Substituto valore de c^2 & u^2 ha-

betur $\frac{4gf^2(2a)^{n+1} - 4gf^{n+3}}{(n+1)h^n r^2} =$

$\frac{4g(2a)^{n+1} - 4gy^{n+1}}{(n+1)h^n}$: unde obtinetur

$$\frac{f^2(2a)^{n+1} - f^{n+3}}{(2a)^{n+1} - y^{n+1}} = r^2. \text{ Exempli gra-}$$

tia,

tia, agat vis in ratione reciproca duplicata distantiarum, erit $n = -2$. Et $r^2 = \frac{(2af - f^2)y}{2a - y}$; & si ponatur $2af - f^2 = b^2$; fiet $r^2 = \frac{b^2 y}{2a - y}$; quæ æquatio pertinet ad sectiones conicas.

* *Haud ægre id demonstrari potest, etiam non suppositis difficilioribus illis propositionibus, quibus sectiones conicæ ad diametros, vel radios osculi referuntur: ita in ellipsi Fig. VI. demissis ex utroque foco F, f perpendiculis FK, fg in tangentem kg facile ostenditur, angulos a tangente, & rectis ad focos ductis interceptos gMf, KMF esse æquales: dein factum ex perpendiculis fg $\times$ FK æquari quadrato semiaxis minoris (præter alios id demonstrat Caillius in Append. ad Astronom. pag. 20 edit. Vienn.): itaque si ponatur semiaxis major = a, minor = b; distantia MF = y: perpendiculum FK = r, erit fM = fM + MF - MF = 2a - y. Et fg = $\frac{b^2}{r}$: cum jam sit MF : Mf = FK : Fg, seu $y : 2a - y = r : \frac{b^2}{r} = r^2 : b^2$, erit $r^2 = \frac{b^2 y}{2a - y}$: idem ostenditur de parabola; nam si parameter ellipseos ponatur = p, erit $b^2 = ap$*



$\frac{ap}{2}$; & $r^2 = \frac{apy}{4a - 4y}$. Jam abeunte ellipti in parabolam, semiaxis a evadit infinitus, & $r^2 = \frac{py}{4}$.

§. XXVI.

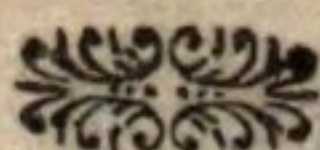
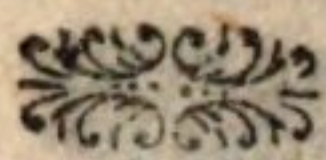
Ad problema directum virium centralium progredior, quo in data curva ratio virium investigatur, queis describi possit: initium duco a Circulo: in hoc omnia perpendiculara ex centro in tangentes demissa cum radiis congruunt, & æqualia sunt: erit itaque $f = r$: unde & $c = u$. §. XXIV. Seu celeritas corporis circulum describentis est constans.

2) Cum in omni motu curvilineo sit $2gPrdy = Mu^2 dr$ (§. XXIII), & in circulo $y = r$; adeoque $dy = dr$; fiet $2grP = Mu^2$; & $P = \frac{Mu^2}{2gr}$; seu vis centripeta in circulo est in ratione composita ex directa massa corporis moti, duplicata celeritatis, & reciproca radii.

3) Si corpus M agente potentia P constante motu uniformiter accelerato per dimidium radium, seu spatium $= \frac{1}{2} r$ descenderet, celeritas in fine acquisita exprimeretur æquatione

$$4gP \frac{r}{2} = Mu^2 \text{ (§. XIII. n. 3)}, \text{ seu } P = \frac{Mu^2}{2gr};$$

eadem vero exhibet celeritatem corporis



poris in circulo moti per præc. Unde corpus in circulo ea celeritate incedit, quam per eandem vim centripetam constantem acquireret descendendo per dimidium radium.

4) Centrum virium attrahat in ratione reciproca duplicata distantiarum, sitque h illa distantia, in qua vis centripeta æquatur gravi-

tati terrestri P : fiat $r^2 : h^2 = P : \frac{h^2 P}{r^2}$; erit

hæc vis centripeta agens in distantia $= r$, in qua a corpore circulus describitur: substituatur hæc vis loco P in æquatione num. secundi

$P = \frac{Mu^2}{2gr}$; fiet $\frac{h^2 P}{r^2} = \frac{Mu^2}{2gr}$: & quia

pondus corporis terrestris exprimi potest per massam M , erit $\frac{h^2}{r} = \frac{u^2}{2g}$. Et $u =$

$$\sqrt{\left(\frac{2h^2 g}{r}\right)}.$$

5) Quoniam per num. 1. motus in circulo est æquabilis, tempus periodicum t , quo tota peripheria describitur, invenietur, si periphe-

ria dividatur per celeritatem $u = \sqrt{\left(\frac{2h^2 g}{r}\right)}$

in allata hypothesi. Sit diameter ad peripheriam $= 1 : p$; erit peripheria radii $r = 2rp$;

& tempus periodicum $t = \frac{2rp\sqrt{r}}{\sqrt{(2h^2 g)}}$. Et

D

$$t^2 =$$



$$t^2 = \frac{2 p^2 r^3}{h^2 g}. \text{ Unde patet, quadrata tem-}$$

porum periodicorum, fore ut cubos radiorum.

* Centrum virium sit ipsa terra, & corpus circa illius superficiem circulum describat, erit in hoc casu $h = r$; & $u = \sqrt{2g}$. Et $t = p$,

$$\sqrt{\left(\frac{2r}{g}\right)}. \text{ Radius terræ } r \text{ est } = 19622385.$$

$$g = 15 \cdot 1038. \text{ Et } p = 3 \cdot 14159. \text{ Unde invenitur celeritas } u \text{ intra secundum } = 24346$$

$$\text{ped. \& tempus } t = 5064'' = 1 \text{ h. } 24' \cdot 24''.$$

§. XXVII.

Ad definiendas adfectiones motus in corpore ellipsin describentis, in cujus alterutro foco centrum virium existat, pono semiaxem majorem $= a$, minorem $= b$. Distantiam corporis a centro virium $= y$; perpendiculum ex illo in tangentem demissum $= r$; erit ex

$$\text{natura ellipseos } r^2 = \frac{b^2 y}{2a - y} \text{ (§. XXV in}$$

nota). Cum jam in quavis curva sit $ur = fc$

$$(\text{§. XXIV}), \text{ \& } u^2 = \frac{f^2 c^2}{r^2}, \text{ substituto valo-}$$

$$\text{re de } r^2, \text{ erit } u^2 = \frac{f^2 c^2 (2a - y)}{b^2 y}. \text{ Diffe-}$$

$$\text{rentietur hæc æquatio: fiet } 2u du = \frac{f^2 c^2}{b^2}$$

(—



$$\frac{(-y dy - 2a dy + y dy)}{y^2} = -\frac{2ac^2 f^2 dy}{b^2 y^2}$$

$$\& u du = \frac{-ac^2 f^2 dy}{b^2 y^2} : \text{est autem genera-}$$

tim $-2gPdy = Mudu$ (§. XXIII), &

$$u du = \frac{-2gPdy}{M} : \text{ergo fiet } \frac{ac^2 f^2 dy}{b^2 y^2} =$$

$$\frac{2gPdy}{M} ; \& P = \frac{ac^2 f^2 M}{2gb^2 y^2} . \text{ Quare ob}$$

factorem $\frac{ac^2 f^2 M}{2gb^2}$ in eadem ellipsi constan-

tem, vires centripetæ P erunt ut $\frac{1}{y^2}$, seu in
ratione reciproca duplicata distantiarum à
centro virium.

$$2) \text{ Cum sit } u^2 = \frac{f^2 c^2 (2a - y)}{b^2 y}, \text{ erit}$$

$$\frac{b^2 u^2 y}{f^2 (2a - y)} = c^2 : \text{ Substituto hoc valore in}$$

$$\text{æquatione } P = \frac{ac^2 f^2 M}{2gb^2 y^2}, \text{ erit } P =$$

$$\frac{af^2 M b^2 u^2}{2gb^2 f^2 (2a - y) y} = \frac{aMu^2}{2g(2a - y)y} : \text{ Un-}$$

$$\text{de eruitur } u = \sqrt{\left(\frac{2gPy(2a - y)}{aM} \right)} . \text{ Si}$$

jam corpus M vi centripetæ P in eadem di-
stantia y circulum describeret, foret celeritas



in circulo $= \sqrt{\left(\frac{2gPy}{M}\right)}$ (§. præc. n. 3).

Quare in hac hypothefi erit celeritas in ellipfi, ad celeritatem in circulo, ut $\sqrt{\left(\frac{2gPy(2a-y)}{aM}\right)}$

$$: \sqrt{\left(\frac{2gPy}{M}\right)} = \sqrt{(2a-y)} : \sqrt{a} =$$

$\sqrt{MF} : \sqrt{SC}$. Fig. VI. Seu in ratione subduplicata distantiae corporis a foco altero, ad semiaxem: jam vero, quamdiu corpus arcum Lsl percurrit, semper est $Mf < SC$: in in punctis L, l , fit $LF = Lf = SC$; & in arcu LSl semper est $Mf > SC$: quapropter velocitas corporis in ellipfi moti minor erit, vel æqualis, aut major ea, qua in eadem distantia posset circulus describi, prout in ellipfi percurritur arcus Lsl , aut corpus versatur in extremitatibus axis minoris L, l , aut movetur per arcum LSl .

3) Moveantur plura corpora in ellipsibus circa idem centrum virium; & fit h distantia, in qua vis centripeta P æquatur gravitati ter-

restri; eritque eo in casu $P = \frac{ac^2f^2M}{2gb^2h^2}$ per

num. 1. Seu quia in gravitate terrestri poni potest $P = M$; erit $2gb^2h^2 = ac^2f^2$; &

$c^2 = \frac{2gb^2h^2}{af^2}$. Substituto hoc valore in æ-

quatione $P = \frac{ac^2f^2M}{2gb^2y^2}$. Erit $P = \frac{h^2M}{y^2}$:

Quare ob factorem $h^2 M$ quantitatem constantem, si idem fuerit centrum virium, erit vis centripeta etiam in diversis ellipsis circa idem centrum virium descriptis, in ratione reciproca duplicata distantiarum ab eodem.

4) Tempus periodicum t , quo ellipsis describitur, eruendum est ex æquatione $A = \frac{cft}{2}$ (§. XXIV): est vero A area dato tempore

descripta: & quoniam area totius ellipseos æquatur areæ circuli, cujus diameter est media proportionalis inter axes ellipseos $= \sqrt{4ab}$, sit diameter ad peripheriam $= 1 : p$. Invenietur area ellipseos $A = abp$: ac proinde habetur

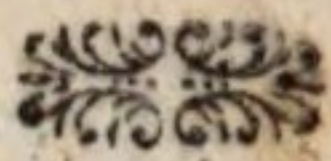
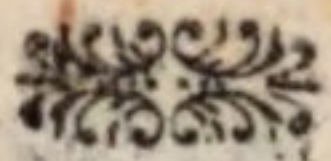
$$abp = \frac{cft}{2}, \text{ eritque } t^2 = \frac{4a^2 b^2 p^2}{c^2 f^2}:$$

sed ex præc. est $c^2 = \frac{2gb^2 h^2}{af^2}$: unde fluit

$$t^2 = \frac{2a^3 p^2}{gh^2}: \text{ \& ob reliquos factores constantes, erunt quadrata temporum periodico-}$$

rum ut cubi semiaxium majorum.

5) Si circa diversa centra virium agentium in ratione directa massarum, & reciproca duplicata distantiarum, ellipses describantur, distantiae h sunt in ratione subduplicata massarum attrahentium (§. XVIII. n. 3); & quadrata h^2 harum distantiarum, in quibus attractio æquatur gravitati terrestri, erunt in ratione simplici massarum: unde cum per num. 3. sit $P = h^2 M$



$\frac{1}{2} M$
 $\frac{1}{y^2}$, erunt vires centripetæ in posito casu
 in ratione directâ simplici massarum attrahen-
 tium, reciproca duplicata distantiarum: &
 quoniam ex num. præc. est $t^2 = \frac{2 a^3 p^2}{g h^2}$,
 erunt quadrata temporum periodicorum in ra-
 tione triplicata semiaxium majorum, & reci-
 proca massarum attrahentium.

§. XXVIII.

Denique, ut motum corporis in parabola,
 in cujus foco F (Fig. VII) centrum vi-
 rium sit, determinem, illius parametrum pono
 $= p$: distantia verticis S , a foco, quam supra
 posui $= f$, erit $FS = \frac{1}{4} p$. Quarta pars pa-
 rametri: velocitas in $S = c$. Radius vector
 $MF = y$: erit ex natura parabolæ quadra-
 tum perpendiculi ex foco in tangentem demissi

$r^2 = \frac{p y}{4}$ (§. XXV in nota): cum jam gene-

ratim sit $ur = fc$ (§. XXIV); & $u^2 = \frac{f^2 c^2}{r^2}$

factis substitutionibus erit nostro in casu $u^2 =$
 $\frac{4 p^2 c^2}{16 p y} = \frac{p c^2}{4 y}$. Differentietur hæc æqua-

tio, eritque $u du = \frac{-p c^2 dy}{8 y^2}$: & substitua-

tur hic valor in æquatione generali §phi XXIII,

$= 2$



$$-2gPdy = Mdu; \text{ fict } -2gPdy = -pMc^2 dy \\ \frac{-pMc^2 dy}{8y^2}. \text{ Et } P = \frac{Mpc^2}{16gy^2}; \text{ cum jam}$$

in eadem parabola factor $\frac{Mpc^2}{16g}$ fit constans,

erit P , ut $\frac{1}{y^2}$, seu *vis centripeta* erit in *ratione reciproca duplicata distantiarum a foco*.

$$2) \text{ Quoniam est } u^2 = \frac{pc^2}{4y}; \text{ erit } c^2 =$$

$\frac{4u^2 y}{p}$: quo substituto in æquatione ultima,

$$\text{fiet } P = \frac{4Mpu^2 y}{16gpy^2} = \frac{Mu^2}{4gy}. \text{ Et } \sqrt{\left(\frac{4gPy}{M}\right)}$$

$= u$. Quare *velocitas u* erit *ubique in ratione directa subduplicata distantie corporis a centro virium*. Quodsi idem corpus M in æquali distantia y , eademque vi P circulum describeret, celeritatem deberet habere $=$

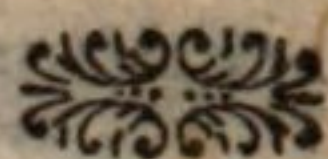
$$\sqrt{\left(\frac{2gPy}{M}\right)} (\S. XXVI. n. 3). \text{ Quare in hac}$$

hypothesi erit *celeritas in parabola, ad celeritatem in circulo* $= \sqrt{4} : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

3) Si circa idem centrum virium diversæ parabolæ describantur, sit h illa distantia a centro virium, in qua vis centripeta æquatur gra-

$$\text{vitati terrestri, erit eo in casu } P = \frac{Mgc^2}{16gh^2},$$

seu quia poni potest $P = M$, erit $c^2 =$
 $16gh^2$



$\frac{16gh^2}{p}$: substituto hoc valore in æquatione

num. 1. $P = \frac{Mpc^2}{16gy}$, fiet $P = \frac{Mh^2}{y^2}$: qua-

re in diversis etiam parabolis circa idem centrum virium descriptis, erit vis centripeta P ,

ut $\frac{1}{y^2}$.

4) Area SFH , quam corpus describit, digrediendo a vertice S ad 90° , æquatur $\frac{2}{3}$ rectanguli $HF \times SF = \frac{p}{4} \times \frac{p}{2} = \frac{p^2}{8}$: erit ergo hæc area $= \frac{\frac{2}{3} \times p^2}{8} = \frac{p^2}{12}$: si

jam in æquatione $A = \frac{cft}{2}$ (§. XXIV). Lo-

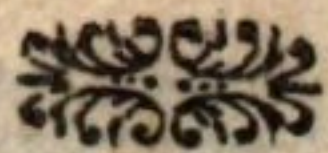
co A substituatur area $\frac{p^2}{12}$; & fiat $f = \frac{p}{4}$;

ac $c = \sqrt{\left(\frac{16gh^2}{p}\right)}$ ex præc. erit $\frac{p^2}{12} =$

$\frac{pt}{8} \sqrt{\left(\frac{16gh^2}{p}\right)}$: facta reductione habetur

$t^2 = \frac{p^3}{36gh^2}$. Seu quadrata temporum,

quibus corpus a distantia minima ad 90° digreditur, sunt, ut cubi parametrorum, vel distantiarum minimarum.



CAPUT VI.

*De Mensura Virium, quibus homines,
jumenta, ac fluida pollent.*

§. XXIX.

Homines, ac jumenta non raro in machinis vires potentiarum motricium obeunt: illorum robur, ac vis, quam in movendis machinis exerere possunt, pendet a causis compluribus: non solum a pondere proprii corporis, sed etiam a musculorum, ac nervorum seu intensione, seu remissione, a sana corporis constitutione, ab assuetudine laboris, a situs commoditate, a pavimenti, cui insistunt, firmitate, a laboris diuturnitate &c. Ex quo manifestum est, nunquam exactam omnino harum virium mensuram haberi posse: unde ea nos contentos esse oportet, quam prudens, & verosimilis earum æstimatio ex observationibus deducta nobis præbet: referam ergo, quæ de viribus hominum in commovendis machinis observata sunt, & a plerisque nunc admittuntur: vide P. Walcher kurzer Inhalt der mechan. Collegien. num. 311. & seq.

§. XXX.

1) **S**i homo mediocris roboris duas vel tres horas continuas machinam movet, quin a pondere proprii corporis juvetur, illius vis non censetur excedere 25, aut 26 libras: du-



durante tamen hoc labore simul intra horam conficere spatium potest = 12000 pedum, cui celeritas intra minutum secundum respondet = $3\frac{1}{4}$ pedum. Vehementiorem nervorum intensionem, simulque celeriores motum homo vix sustinere potest, seu pondus aliquod horizontaliter trahat, aut ante se trahat, vel manubrium furculæ, vel scytalas ergatæ circumagat. Vide Architect. hydraul. Bellidorii P. I. C. I. §. 120. Quod si labor sæpius interrumpatur, facile intelligitur, pluris æstimari hominis vires posse.

2) Unus equus tantum censetur præstare, ac septem homines, si eadem celeritate in via horizontali incedat: unde vis equi æstimatur = $25 \times 7 = 175$ lb, cum celeritate intra secundum = $3\frac{1}{4}$ pedum. Vis bovis major censetur, quam equi: celeritas autem eo minor.

3) Pondus & inertia hominis æstimatur = 140 lb. Pondus equorum & boum sæpe plures centenarios excedit: unde non obscure colligitur, quantopere animalium vis intendi queat, si proprii corporis pondere juvetur, uti in rotis contingit, quæ pede premente concitantur: verum idem pondus corporis sæpe augere debet resistantiam, ut si ascensus sit per plana inclinata: hinc experientia docet, tres homines, singulos 100 lb onustos, facilius collem ascendere, quam unum equum 300 lb gravatum: nempe in hoc casu superanda est pars ponderis proprii, quod in equo multo majus est, quam in homine.

4) Hominum ac jumentorum vires longe aliter sunt comparatae, ac vires gravitatis seu terrestris, seu universalis; gravitas enim in corpora cujuscunque massae, & quacunque celeritate mota aequaliter agit: verum animalium vires fere eo minorem effectum habent, quo major est massa, in quam agunt, & quo majore jam celeritate moventur: quin ultra certum velocitatis gradum istae vires omnino intendi nequeunt; nam cum movendo machinam, homo ac jumentum se ipsum quoque eadem celeritate movere debeat, necesse est, ut quo majore celeritate machinam impellat, eo plus quoque virium ad movendum se ipsum impendat, ac proin eo minus virium in machinam exerat.

5) Itaque ad determinandam vim, qua homo actu machinam movere possit, primo inquirenda est vis maxima hominis, quam dum homo exerit, omni simul velocitate destituitur: dein definienda est celeritas maxima hominis, qua cum movetur, nullam jam vim exercere potest: denique licet exacte definiri nequeat, quantum vis hominis per auctam ipsius celeritatem minuatur, verosimiliter tamen ab Eulero, aliisque assumitur, decrementsa virium sequi rationem duplicatam celeritatum: his autem positis jam determinare licet vim residuam, qua homo certa velocitate praeditus actu machinam movet: ut mox ostendam.

6) Illud porro observatione dignum est, motum ab homine, & jumento in machinis ita produci, ut teste experientia motus omnino
pro



pro æquabili haberi queat, siquidem prima temporis momenta excipiantur: nam initio quidem, cum machina a quiete ad motum transfertur, motus machinæ continuo acceleratur tum per vim inertiae, tum per continuatam hominis actionem: verum eo ipso hominis impellentis celeritas quoque augeri debet, ejusque vis imminui, quod eousque fiet, donec vis residua omnino, aut proxime æquetur resistantiæ continuo superandæ: hoc autem in casu motus jam æquabilis evadet; quantum enim celeritatis incrementum singulis instantibus a vi producit, tantum a resistantia destruitur.

* *Eulerus in Comment. novis Acad. Petropol. Tom. III. ad annum 1750 &c. pro vi maxima hominis, quam dum exerit, omni simul velocitate caret, assumit pondus = 70 lb, & pro celeritate maxima, qua præditus, nullam adhibere vim potest, spatium 6 pedum intra secundum: verum utraque hæc mensura mihi justo major videtur, si cum observatione num. i. allata, & a plerisque nunc recepta conferratur, ut deinceps probabo: quapropter ut tam vis, quam celeritas maxima cum illa observatione congruat, mihi ponenda videtur vis maxima = 45 lb, & celeritas maxima = 5'. Cur dein assumatur, decrementa virium in homine sequi rationem duplicatam celeritatum, conabor reddere rationem aliquam, acturus Cap. seq. de momento inertiae.*



§. XXXI.

Iam ponamus casum simplicissimum, quo homo datum onus Q super plano horizontali protrahit, & quæramus, qua celeritate id fiat, siquidem vires suas rite intendat. Celeritas maxima hominis, qua præditus, nullam exerere vim potest, sit $= h$: vis autem maxima, quam homo sine celeritate exerit $= f$. Celeritas, qua homo actu incedit, ac onus movet $= u$: cum jam decrementa virium ponantur esse in duplicata ratione celeritatum, fiat

analogia $h^2 : u^2 = f : \frac{fu^2}{h^2}$; quartus hic terminus exprimet decrementum vis absolutæ f ,

quod homo subit, dum celeritate u incedit:

quare erit vis hominis residua $= f - \frac{fu^2}{h^2} =$

$\frac{f(h^2 - u^2)}{h^2}$. Porro si onus Q motu horizontali provehitur, non nisi illius frictio superanda est: ponatur ea $= F$, eritque potentia actu movens $= \frac{f(h^2 - u^2)}{h^2} - F =$

$\frac{fh^2 - fu^2 - Fh^2}{h^2}$: massa autem ab hac potentia movenda est tam onus Q , quam pondus ipsius hominis, quod pono $= P$: si jam in formula generali §. XII. $2gPds = Mdu$,

loco vis moventis P , & massæ motæ M debitæ substitutiones fiant, habebitur æquatio

$$2gds$$



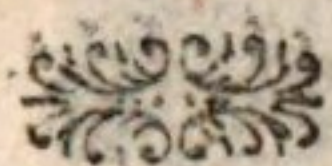
$$\frac{2gds(fh^2 - fu^2 - Fh^2)}{h^2} = (P + Q) u du; \text{ \& } ds = \frac{(P + Q) h^2 u du}{2g(fh^2 - fu^2 - Fh^2)};$$

hujus integrale, ut reperiat, pono $fh^2 - fu^2 - Fh^2 = x$; erit $u du = \frac{-dx}{2f}$; \& $ds = \frac{-(P + Q) h^2 dx}{4gfx}$; \& $s = \frac{-(P + Q) h^2}{4gf} \text{Log. } x + C$ (ubi per C indico adjectam constantem) $= C - \frac{(P + Q) h^2}{4gf} \text{Log. } (fh^2 - fu^2 - Fh^2)$; ad definiendam constantem C , adverte, posito $u = 0$, debere etiam spatium s evanescere: unde fiet $0 = C - \frac{(P + Q) h^2}{4gf} \text{Log. } (fh^2 - Fh^2)$; \& integrale completum evadet $s = \frac{(P + Q) h^2}{4gf} \text{Log. } \left(\frac{fh^2 - Fh^2}{fh^2 - fu^2 - Fh^2} \right)$.

§. DXXII.

Motus æquabilis redditur, quamprimum
 potentia accelerans $\frac{fh^2 - fu^2 - Fh^2}{h^2}$

seu differentia inter vim hominis, \& resistentiam oneris evanescit: hoc autem revera non evenire, nisi percurso spatio s infinito, ex inventa



venta æquatione facile colligitur; nam spatium s evadit infinitum, si denominator $fh^2 - fu^2 - Fh^2$, seu potentia accelerans fit $= 0$. Nihilominus, cum experientia doceat, motum hominis, exceptis primis tantum momentis, ita mox accedere ad æquabilem, ut pro tali in ipso usu citra sensibilem errorem omnino haberi queat (§. præc. n. 6), generatim licet ponere $\frac{fh^2 - fu^2 - Fh^2}{h^2} = 0$. Unde eruitur fh^2

$$= fu^2 + Fh^2, \text{ \& } u = h \sqrt{\frac{f - F}{f}} = h \sqrt{1 - \frac{F}{f}}.$$

Dum ergo ad hunc gradum celeritatis attendimus, perspicuum est, eam non pendere ab inertia P hominis, vel oneris Q , sed tantum a frictione F , quam onus protractum super planum horizontale ob partium prominentium asperitatem subit.

2) Quare cum in hoc casu frictio F totam resistantiam exprimat, quam homo superare potest, præditus velocitate $= u$, ponamus $F = 25$ lb; vim maximam hominis $f = 45$ lb; & celeritatem maximam $h = 5$, invenietur celeritas u , qua homo incedere potest, dum simul vim $= 25$ lb exerit $1 = h \sqrt{1 - \frac{F}{f}} = 5 \sqrt{1 - \frac{25}{45}} = 3\frac{1}{3}$; talis nempe, quæ cum experientia (§. præc. n. 1) omnino congruit;



gruit: si vero cum Eulero pro vi maxima statuatur $f = 70$ lb, & pro celeritate maxima $h = 6$: vis autem actu adhibita rursus sit $F = 25$ lb; fiet celeritas $u = 6 \sqrt{1 - \frac{25}{70}} = 4 \frac{4}{5}$, cui celeritati responderet spatium intra horam percurrendum $= 17326$, cum tamen vulgo illud statuatur certo non majus, quam

12000'. Bellidorius in Archit. hydr. illud adhuc minus statuit. Similiter si ex æquatione $u = h \sqrt{1 - \frac{F}{f}}$, quæratu valor de $F = f \left(1 - \frac{u^2}{h^2}\right)$, posito $u = 3 \frac{1}{2}$, erit in meis valoribus, quos vi maximæ f , & celeritati maximæ h tribuo, resistentia, aut vis actualis hominis $F = 25$ lb, prout vulgo statuitur: in Eulerianis autem valoribus, inveniretur $F = 48$ lb. Unde certe justo majores illi mihi videntur.

* *Celeritatem hominis cito ad æquabilitatem convergere, etiam ex inventa æquatione spatii colligi potest: nam dicatur numerus, cujus logarithmus hyperbolicus æquatur unitati*

$= n$. Seu $\text{Log. } n = 1$. Et factor $\frac{h^2 (P + Q)}{4 g f}$

$= m$; invenietur facto regressu ad numeros,

celeritas $u = h \sqrt{1 - \frac{F}{f}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{n}{m}}}$
Pa.

Patet celeritatem hanc equabilem fore, si fa-

ctor $\sqrt{\left(1 - \frac{\frac{1}{s}}{n \frac{1}{m}}\right)}$ *proxime aequatur unitati.*

Sit spatium confectum $s = 10'$. $P = 140$ lb.

Q *massa oneris sit tripla frictionis* $= 3 \times 25$

$= 75$ lb. $h = 5'$. $f = 45$ lb. $g = 15' . 1038$.

erit $m = 1 . 977$. *Facta reductione inveni-*

tur $\sqrt{\left(1 - \frac{\frac{1}{s}}{n \frac{1}{m}}\right)} = 0 . 9989$ *proxime* $=$

1. *Unde erit celeritas* $u = h \sqrt{\left(1 - \frac{F}{f}\right)}$
proxime aequalis uniformi.

§. XXXIII.

Quoniam vis unius equi aestimatur aequalis
vi 7 hominum eadem celeritate inceden-
tium, in æquatione $u = h \sqrt{\left(1 - \frac{F}{f}\right)}$,

loco vis maximæ hominis $f = 45$ lb, substi-
tuenda est vis maxima unius equi $= 7 f = 45$
 $\times 7 = 315$: unde erit æquatio pro celerita-

te equi $u = 5 \sqrt{\left(1 - \frac{F}{315}\right)}$: ac si plures
jungantur equi ejusdem roboris, quorum nu-
merus $= n$; erit illorum celeritas $u = 5$

$\sqrt{\left(1 - \frac{F}{315n}\right)}$. Jam ut aliquem rei usum

ostendam, ponam datum onus currui imposi-
tum ab uno equo via non admodum difficili,
ac horizontali protrahi: Dan. Bernoullius in

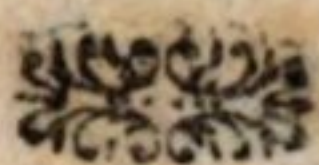


Comment. Acad. Petrop. ad an. 1768 existimat, frictionem in curribus, si rotis fuerint instructi, quæ circa axes axungia bene oblinitos circumaguntur, vix partem $\frac{1}{20}$ oneris efficere: hoc ergo assumpto, sit onus ipsius currus cum onere ipsi imposito $= Q$, erit $F = \frac{Q}{20}$, & cele-

$$\text{ritas unius equi } u = 5 \sqrt{\left(1 - \frac{Q}{315 \times 20}\right)} \\ = 5 \sqrt{\left(1 - \frac{Q}{6300}\right)}: \text{ ex quo patet, nul-}$$

lum onus ab equo in hac hypothefi protrahi posse, si fuerit æquale, vel majus 6300 lb. Jam secundum hanc formulam construxi sequentem tabulam, in qua columnæ Q indicant onera ab uno equo horizontaliter protracta in libris; columnæ autem C celeritatem u multiplicatam per 3600", seu celeritatem equi intra horam in mensura pedum.

Q	C	Q	C	Q	C
0	18000	1000	16510	2000	14870
100	17857	1100	16353	2500	13979
200	17712	1200	16194	3000	13026
300	17566	1300	16036	3500	11999
400	17419	1400	15875	4000	10874
500	17269	1500	15711	4500	9621
600	17120	1600	15548	5000	8176
700	16970	1700	15379	5500	6413
800	16818	1800	15212	6000	3928
900	16664	1900	14870	6300	0



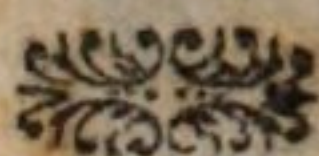
§. XXXIV.

Allata tabula etiam servire potest 1) ad inveniendam celeritatem oneris, si plures jungantur equi. e. g. Sit datum onus $Q = 1000$ lb. Numerus equorum $= 2$. Dividatur onus per numerum equorum, & pro quoto 500 quæeratur celeritas in tabula $= 17269$: hoc datum onus super currum a duobus equis provehetur.

2) Vicissim quæri potest numerus equorum, ut datum onus e. g. 4000 lb, data celeritate provehant: celeritas data reducatur ad spatium intra horam conficiendum, sitque $= 16510$ ped., quæeratur in tabula respondens illi onus $Q = 1000$: hoc numero dividatur onus datum 4000 lb, quotus 4 dabit numerum equorum.

3) Dato onere $Q = 4000$ lb, numero equorum $= 4$, & spatio, per quod onus transferendum est $= 2$ milliaria germ. (quod efficit 64000 pedes, si milliari uni tribuantur 32000 ped.) inveniri poterit tempus, quo onus per datum spatium transferetur: nam quæeratur per num. i. pro dato onere, & numero equorum celeritas horæ respondens $= 16510$; & fiat proportio: spatium 16510 conficitur intra horam: spatium datum 64000 percurreretur tempore 3.87 hor. seu 3 hor. 52.

4) Denique si frictio fuerit major, quam pars 20^{ma} oneris Q , e. g. si onus super trahas in via aspera promoveretur, frictio æstimari poterit pars circiter tertia oneris; instituaturs pro-



portio $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, seu $3 : 20$; ita est datum onus e.g. 225 lb, ad terminum 4tum = 1500; pro hoc quærat^r celeritas respondens in tabula = 15711, & hac ab uno equo in isto casu onus protrahetur.

5) Si bos censeatur præstare eundem effectum cum equo, ita tamen, ut quantum bos equum robore excedit, tantum celeritate deficiat, per hypothesin licebit ponere vim maximam bovis f quintuplo majorem, proin = 5×315 : celeritatem autem maximam h , quintuplo minorem, adeoque = $\frac{1}{5} = 1$. Unde pro bobus

$$\text{dabitur æquatio } u = \sqrt{\left(1 - \frac{Q}{5 \times 315 \times 20}\right)}$$

= $\sqrt{\left(1 - \frac{Q}{31500}\right)}$. Ex allata tabula celeritas bovis intra horam invenietur, si datum onus $Q = 6000$ dividatur per 5, & pro quoto 1200 quærat^r celeritas respondens 16194: hæc rursus divisa per 5, dabit celeritatem bovis = 3239.

§. XXXV.

Quodsi homo, vel jumentum, onus per *planum æquabiliter inclinatum* sursum trahat, paulo aliter calculus instituitur: posito radio = 1 sit finus anguli inclinationis = s . Cofinus = c . Onus absolutum = Q : fiat $1 : s = Q : Qs$; hæc erit vis, qua onus directione ad planum parallela deorsum nititur: similiter, si pondus potentiæ sit = p , erit ps vis, qua eadem potentia per planum deorsum urge-



urgetur: porro fiat $1 : c = Q : Qc$; hæc erit pressio oneris in planum: & si frictio ponatur efficere partem $\frac{1}{m}$ pressionis, erit frictio =

$\frac{Qc}{m}$. Jam potentia motrix directione ad planum parallela sursum agens, debet triplicem hanc resistantiam superare: unde si illa dicatur P , erit vis residua sursum trahens = $P - Qs$

$- ps - \frac{Qc}{m}$: & si potentia P fuerit homo,

illius loco ponenda est vis $\frac{f(h^2 - u^2)}{h^2}$ §.

XXXII: unde erit vis movens residua = $\frac{f(h^2 - u^2)}{h^2} - Qs - ps - \frac{Qc}{m}$: cum vero

motus brevi ad æquabilitatem reducitur, evanescet hæc potentia accelerans, eritque $\frac{f(h^2 - u^2)}{h^2} = Qs + ps + \frac{Qc}{m}$. Facta

reductione invenitur

$u = h \sqrt{1 - \frac{(Qs + ps + \frac{c}{m} Q)}{f}}$: si

vero potentia P onus per planum deorsum traheret, foret potentia movens residua = $P +$

$Qs + ps - \frac{c}{m} Q$: & si P fuerit homo, devenietur ad æquationem

$u = h \sqrt{1 + \frac{(Qs + ps - \frac{c}{m} Q)}{f}}$.



§. XXXVI.

Ad movendas machinas sæpissime adhibentur *fluida*, uti aqua, aer, atque etiam ignis: quare operæ pretium erit, quædam de fluidorum, imprimis aquæ, actione animadvertere, quæ in hoc perquam difficili argumento nunc a plerisque admittuntur.

1) *Actio perpendicularis fluidorum motorum est in ratione directâ composita duplicata celeritatum, simplici densitatum, & superficierum, quæ eorum cursui opponuntur: actio autem perpendicularis est ad obliquam cæteris paribus, ut quadratum sinus totius ad quadratum sinus obliquitatis. Vide Inst. Mech. P. Carol. Scherffer p. II. num. 105 & 106.*

2) *Vis absoluta fluidi e. g. aquæ in planum immobile perpendiculariter incurrentis æquari censetur cylindro aqueo, cujus basis æqualis est superficiei plani percussæ: altitudo autem spatii, in ejus descensu fluidum per gravitatem terrestrem suam celeritatem acquireret: aliqui tamen cum Dan. Bernoullio duplum hujus spatii capiunt pro cylindri altitudine: neque adhuc res decisa est. Vide Mech. P. Scherffer P. II. C II. art. III.*

3) *Si fluidum agit in planum mobile, illius actio mox minuitur, quamprimum celeritatem aliquam planum obtineat: tum vero actio fluidi tantum fiet celeritate respectiva, seu differentia celeritatum fluidi, ac plani: hæc si omnino evanescat: planum actionem fluidi omnino effugeret:*



geret: itaque initio actio fluidi in planum mobile continuo minuitur, donec planum eam celeritatem obtineat, ut actio fluidi præcise æquetur resistantiæ singulis momentis superandæ: quæ cum constans sit, motus etiam plani infiet æquabilis: & hic potissimum status in motu machinæ considerandus est: qui etiam exceptis primis momentis statim consequitur, ut rursus experientia docet.

4) Sit ergo superficies plani percussi $= b^2$; celeritas fluidi incurrentis $= c$, celeritas plani mobilis ad motum jam æquabilem redacti $= u$. erit celeritas respectiva $= c - u$; & per æquationem $s = \frac{u^2}{4g}$ (§ XIV). erit spatium,

per quod, si corpus gravitate terrestri impulsus descendat, celeritatem $c - u$ acquirat $= \frac{(c - u)^2}{4g}$; & volumen cylindri aquei $=$

$$\frac{4g}{(c - u)^2} b^2$$

Quodsi mensuræ omnes datæ sint in pedibus, & pondus pedis cubici aquei sit $= m$, erit vis, cui fluidi directe in planum

$$\text{mobile incurrentis actio æquatur} = \frac{m b^2 (c - u)^2}{4g}$$

$$\text{vis autem absoluta foret} = \frac{m b^2 c^2}{4g}$$

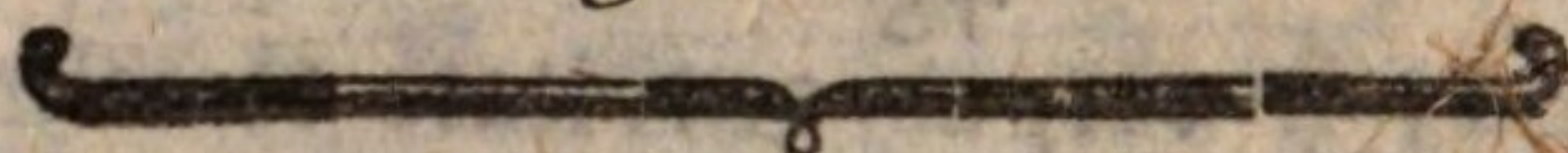
* *Usum hujus formulæ Cap. seq. ostendam: cæterum nemo indignetur, me hæc de fluidorum actione asserta sine demonstratione recensere.*



sere: neque enim dissertationis limites id paterentur, in qua nil aliud propositum habui, quam ut generalem virium mensuram præberem, ejusque usum quibusdam exemplis illustrarem, neque etiam animus mihi foret, hanc de fluidis theoriam uberius pertractare, in qua nec ratione, nec experimentis hæcenus institutis, quidquam certi statui potest. Mereatur de hoc argumento legi P. Lecchi Idrostatica essam. ne' sui principi.

C A P U T VII.

De Mensura Virium ope Vectis agentium.



§. XXXVII.

Sit vectis rigidus AS (Fig. VIII), pondere, ac inertia destitutus: massa tamen A oneratus, ac circa punctum fixum S in plano horizontali libere mobilis: in quodvis punctum C agat potentia P, directione ad vectem normali, eumque ad gyrationem determinet: ut jam hunc vectis motum adcuratius definiam, suppositis notis principiis de æquilibrio in vecte, secundum quæ potentiæ æquilibrantes esse debent in ratione reciproca distantiarum a fulcro, seu puncto fixo S.

$$1) \text{ Instituo analogiam } SA : SC = P : \frac{P \times SC}{SA} \\ \text{hæc}$$



hæc vis in A adplicata confisteret in æquilibrio cum vi in C agente, ac proinde eundem effectum, seu motum angularem produceret, quem vis P in C agens crearet. Sit $SA = a$. $SC = x$, erit potentia in vectis punctum A agens $= \frac{Px}{a}$. Substituatur ea loco P in æquatione

generali §. XII. $2gPdt = Mdu$, & loco M ponatur massa A , eritque $\frac{2gPxdt}{a} = Adu$;

$$\& \frac{2gPxdt}{Aa} = du.$$

2) Jam hoc elementum celeritatis du tempusculo dt productum spectari potest instar arcus infinite parvi Aa , ad quem percurrendum a vi P hoc tempusculo sollicitatur: fit angulus infinite parvus ASa , seu *velocitas angularis* vectis tempore infinite parvo $= dy$: radius ad peripheriam, ut $1 : p$. erit ap peripheria

tota a radio AS descripta: ponantur $360^\circ = c$, & fiat $c : dy = ap : \frac{apdy}{c}$; 4tus hic terminus exprimet arcum $Aa = du$ in partibus radii: quare habetur æquatio $du = \frac{2gPxdt}{Aa}$

$$= \frac{apdy}{c}; \& dy = \frac{2gcPxdt}{pAa^2}.$$

3) Unde si factor $\frac{2gcPxdt}{p}$ fuerit con-



stans, seu si potentia P maneat eodem modo
vecti adplicata, celeritas angularis erit, ut $\frac{I}{Aa^2}$

seu in ratione reciproca composita ex massa mo-
venda A , & duplicata illius distantiae a puncto
fixo S . Quare celeritas etiam angularis mane-
bit constans, si mutatis licet factoribus, pro-
ductum Aa^2 non mutetur, id est, si massae re-
ciprocent cum quadratis distantiae a puncto fixo

S : idcirco si fiat $SC^2 : SA^2 = A : \frac{A \times SA^2}{SC^2}$

haec massa puncto C adplicata, submota massa
 A , cæteris paribus eundem motum angularem
efficiet, qui daretur massa A in A existente:

nam productum ex massa $\frac{A \times SA^2}{SC^2}$ — in qua-

dratum distantiae SC^2 , erit $= A \times SA^2$.

Similiter, si ponantur aliae quotcunque massae
 B , D , idem motus angularis in vecte dabitur,
five suis in locis relinquantur, five iis submotis

in puncto C substituantur massae $\frac{B \times SB^2}{SC^2}$,

$\frac{D \times SD^2}{SC^2}$: ac proinde loco massarum A , B ,

D , supponi potest unica puncto C adplicata $=$
 $A \times SA^2 + B \times SB^2 + D \times SD^2$

$\frac{\quad}{SC^2}$, quæ

eundem motum angularem in vecte creabit,
quem tres illæ simul producerent. Sit $SB =$
 b ,



b , & $SD = d$, erit hæc massa æquivalens =

$$\frac{Aa^2 + Bb^2 + Dd^2}{x^2}$$

4) Itaque motus angularis vectis AS massis
 A, B, D , onerati, & vi P in C sollicitati erit

$$dy = \frac{2gcPxdt}{p} : \frac{(Aa^2 + Bb^2 + Dd^2)x^2}{x^2}$$

= $\frac{2gcPxdt}{p(Aa^2 + Bb^2 + Dd^2)}$. Ut autem

celeritatem veram du , cujuscunque vectis pun-
 cti e. g. A inveniamus, ab angulo regrediamur
 ad arcum: est autem peripheria tota a puncto

A descripta = ap ; fiat 360° seu $c : dy = ap :$
 $\frac{apdy}{c}$; hic 4tus terminus exprimet arcum, seu ce-

leritatem du respondentem angulo dy : quare,
 si valor inventus hujus anguli substituatur, habe-

bitur $du = \frac{apdy}{c} = \frac{2gaPxdt}{Aa^2 + Bb^2 + Dd^2}$.

Unde patet, celeritatem veram alicujus puncti
 A esse ut momentum vis impellentis Px ductum
 in distantiam puncti A a fulcro, divisum per
 summam factorum ex quavis massa multiplicata
 per quadratum suæ distantiae a puncto fixo:
 jam quodvis ejusmodi productum ex massa in
 quadratum suæ distantiae a fulcro dici solet *mo-*
mentum inertiae illius massæ, quia non nisi ab
 inertia massæ (seu numero particularum, quæ
 movendæ sunt), non vero ab illius gravitate,



a qua omnino præscindebatur, consequitur, ut pro ratione hujus momenti tam celeritas angularis vectis, quam etiam celeritas vera cujuscunque puncti vectis minuatur.

* *Sint duæ massæ æquales: una sit in distantia dupla, distantiae alterius a fulcro, erit celeritas illius, dupla celeritatis istius, ut ex natura vectis manifestum est: momentum autem inertiae in illa, erit quadruplum momenti inertiae in altera: unde cæteris paribus erit momentum inertiae in ratione duplicata celeritatum: inde fortasse peti ratio potest, cur decrementsa virium, quibus homines, & animalia agunt, ponantur sequi rationem duplicatam celeritatum §. XXIX. n. 5. hoc enim decrementum virium non nisi ea ex causa oritur, quod animalia, dum movent alia corpora, simul se ipsa incitare ad motum, ac inertiam proprii corporis superare debeant.*

§. XXXVIII.

Hæc theoria de momento inertiae amplissimum calculi exercitium præberet, ut in Mech. P. Scherffer p. I. n. 221. videre licet: ego vero unicum adducam exemplum, cujus mox usum faciam. Sit in Fig. IX. circulus AQP basis alicujus cylindri circa axem suum per centrum C tanquam punctum fixum transeuntem circumacti: ut momentum inertiae in illo definiamus. Concipiatur hic circulus constare non nisi ex peripheriis concentricis aqp : radius Cp fit $= x$; ratio radii ad peripheriam

=

$= r : p$; erit peripheria radii $Cp = \frac{p x}{r}$: hæc

si ducatur in elementum radii dx , erit elementum areæ circularis $= \frac{p x dx}{r}$: jam hic annu-

lus circularis infinite parvæ crassitie ubique æqualiter distat a puncto fixo C , ejusque momentum inertię habebitur, si ducatur in quadratum distantię cp ; quare momentum inertię hujus

annuli est $= \frac{p x^3 dx}{r}$, cujus integrale præbet

momentum inertię in circulo radii $Cp = \frac{p x^4}{4r}$: & si radius CP , quem habet basis cy-

lindri, sit $= a$, erit momentum inertię in tota basi $= \frac{p a^4}{4r}$. Quod cum in omnibus sectio-

nibus basi parallelis obtineat, posita longitudine cylindri $= b$, erit momentum inertię in toto cylindro circa axem suum gyrato $= \frac{p a^4 b}{4r}$.

Sed $\frac{p a^2 b}{2r}$ æquatur ipsi massæ cylindri; quam

si vocemus $2q$, momentum inertię erit $= a^2 q$. Idem in rotis, ac trochleis circa axes suos gyratos dari, manifestum est.

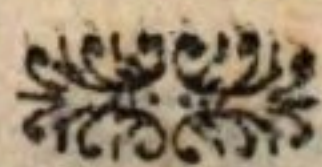
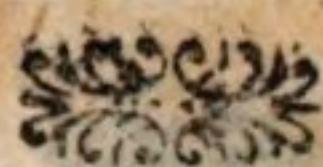
§. XXXIX.

His præmissis jam ipsum motum in machinis, non tantum æquilibrium, quod vulgares



gares statici faciunt, definire licet: unam selegi machinam, majoris usus in humana vita, nempe axem in peritrochio: inde theoriam adplicabo ad tres potentiarum species, scilicet ad pondera, animalia, ac fluida. Sit ergo Fig. X. axis in peritrochio IK : onus Q ope funis suspensum est ex cylindro AL , eritque illius distantia ab axe, seu puncto fixo æqualis radio cylindri, quem pono $= x$, quocum tamen, si opus est, computari debet semidiameter funis: ipsam quoque frictionem, quam axiculi I, K in suis fulcris subeunt, sub onere Q comprehendam (ut Eulerus fieri posse ostendit nov. Comment. Acad. Petrop. ad ann. 1760): erit itaque momentum resistentiæ $= Qx$. Potentia P adplicata sit ubique perpendiculariter ad radium rotæ DP , aut ejusmodi manubrii: sit illius longitudo $DP = a$, erit momentum potentiæ $= Pa$: jam vero in motu actuali, sublato æquilibrio a potentia, pro momento potentiæ actu motum producentis, non nisi differentia horum momentorum $Pa - Qx$ spectari debet. Porro momentum inertiae in ipso onere erit $Q \times AB^2 = Qx^2$: in potentia $P = Pa^2$; & in cylindro, si massa ponatur $= 2q$, erit dictum momentum $= x^2 q$: sub quo etiam comprehendam momentum inertiae in rota GP .

2) Ut jam pro tempusculo infinite parvo dt , celeritas vera du oneris Q inveniatur, per §. XXXVII. n. 4. factor $2gdt$ debet duci in momentum vis impellentis $Pa - Qx$, & distantiam oneris a fulcro $= x$; & hoc productum



etum dividi per summam momentorum inertiae
 $Qx^2 + Pa^2 + qx^2$. Erit adeo $du =$
 $\frac{2gx(Pa - Qx)dt}{Qx^2 + Pa^2 + qx^2}$.

§. XL.

Sit jam primo potentia movens P aliquod
 pondus in rotam GP ope funis agens, ac
 suo descensu onus Q elevans: cum ergo hæc
 potentia sit constans, facta integratione erit u

$$= \frac{2gx(Pa - Qx)t}{Qx^2 + Pa^2 + qx^2}: \text{ si altitudo spatii,}$$

per quod descensus fit, ponatur $= s$, erit $s =$

$$\frac{ut}{2} (\S. XIII. n. 5) = \frac{gx(Pa - Qx)t^2}{Qx^2 + Pa^2 + qx^2}:$$

$$\& \text{ si etiam fiat } x = a, \text{ erit } s = \frac{gt^2(P - Q)}{Q + P + q}.$$

$$\text{Et } t = \sqrt{\left(\frac{(Q + P + q)s}{(P - Q)g} \right)}: \text{ unde redit}$$

formula superius §. XVI inventa, nisi, quod
 eo in loco inertiam machinae q neglexerimus.

$$2) \text{ Sed resumamus æquationem } u = \frac{2gx(Pa - Qx)t}{Qx^2 + Pa^2 + qx^2}, \& \text{ posito tempore } t \text{ con-}$$

stanti, quæramus rationem inter radium cylin-
 dri x , & rotæ a , ut celeritas u omnium possi-
 bilium fiat maxima: ponatur ergo secundum re-
 gulas *methodi de maximis, & minimis* celeri-
 tatis differentiale $= 0$, erit $du = (Qx^2 +$
 $a^2 P$



$$a^2 P + q x^2) (a P dx - 2 Q x dx) - (a P x - Q x^2) (2 Q x dx + 2 q x dx) = 0.$$

Facta reductione invenitur æquatio $x^2 +$

$$\frac{2 a Q x}{Q + q} = \frac{a^2 P}{Q + q} : \&$$

$$x = \frac{a Q \pm a \sqrt{(Q^2 + P Q + P q)}}{Q + q} : \text{negle-}$$

$$\text{cta autem inertia machinæ } q, \text{ foret } x = \frac{a Q \pm a \sqrt{(Q^2 + P Q)}}{Q} : \& x : a = Q \pm$$

$\sqrt{(Q^2 + P Q)} : Q$. Hæc ergo ratio inter celeritatem oneris, & potentiaë, seu inter earum distantias a fulcro esse debet, ut machina sit optime disposita, & onus dato tempore citissime promoveatur: unde patet discrimen a casu æquilibrii, in quo deberet esse $x : a = P : Q$.

§. XLI.

Si potentia movens fuerit homo, momen-
tum vis, actu machinam impellentis $P a - Q x$ brevi evanescet, ac in ipso machinarum usu poni poterit $= 0$ (§. XXX. n. 6). Unde

$$\text{erit } P = \frac{Q x}{a} : \text{jam loco potentiaë } P \text{ substi-}$$

tuenda est vis hominis: ad hanc definiendam

$$\text{fiat } x : a = u : \frac{a u}{x} ; \text{ hæc erit celeritas hominis}$$

tanquam potentiaë: cum jam decrementa viri-
um, sint in duplicata ratione celeritatum, fiat

per



per §. XXXI. $h^2 : \frac{a^2 u^2}{x^2} = f : \frac{f a^2 u^2}{h^2 x^2}$; hoc

erit decrementum vis absolutæ f , cum homo celeritate $\frac{a u}{x}$ movetur: unde erit vis residua =

$$f - \frac{f a^2 u^2}{h^2 x^2} = \frac{f (h^2 x^2 - a^2 u^2)}{h^2 x^2} = P =$$

$$\frac{Q x}{a}: \& a f (h^2 x^2 - a^2 u^2) = Q x^3 h^2.$$

$$\text{Demum invenietur } u = \frac{h x}{a} \sqrt{1 - \frac{Q x}{a f}}.$$

2) Si rursus quæeratur casus celeritatis maximæ, ponatur differentiale $du = dx \sqrt{af - Qx} - Qx dx$

$$\frac{- Qx dx}{2 \sqrt{af - Qx}} = 0. \text{ Fiet } 2af - 2Qx =$$

$$Qx: \& x = \frac{2af}{3Q}. \text{ Quo substituto fiet cele-}$$

$$\text{ritas maxima oneris } u = \frac{2fh}{3Q} \sqrt{\frac{1}{3}}; \& \text{ poten-}$$

$$\text{tiæ} = \frac{u a}{x} = h \sqrt{\frac{1}{3}}: \& \text{ celeritas oneris, ad}$$

celeritatem potentiæ, seu $x : a = 2f : 3Q$: quodsi plures fuerint homines, quorum numerus = n , erit dicta ratio, ut $2nf : 3Q$. In casu autem æquilibrii, ubi celeritas u evanescit,

$$\text{erit } 1 - \frac{Qx}{af} = 0; \& x : a = f : Q.$$

* Quare si machina est optime comparata,
F cele



celeritas hominis intra secundum esse debet =
 $h \sqrt{\frac{1}{3}}$; est autem h celeritas maxima, cujus
 est capax, quam assumpsi = 5: unde erit illa
 celeritas intra secundum = $5 \sqrt{\frac{1}{3}} = 2.8865$,
 & intra horam = 10391'. e. g. sit radius ro &
 vel manubrii ab homine circumacti = 1'. erit
 peripheria = 6.2832; & conficietur una re-
 volutio tempore $\frac{6.2832}{2.8865} = 2.1767$; & intra
 horam = $\frac{3600}{2.1767} = 1654$. Si onus Q fue-
 rit = 270 lb, erit celeritas oneris = $\frac{2fh}{3Q}$
 $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.3207$; & intra horam onus ascen-
 det per spatium = 1155.

§. XLII.

Denique potentia movens P sit aqua, quæ
 in rotam aquariam radii $DP = a$, cele-
 ritate = c incurrat: superficies alæ percussæ

sit = b^2 . Fiat $x:a = u:\frac{ua}{x}$: hæc erit celeri-

tas rotæ in puncto percussionis, cui potentia
 adplicatur: unde erit celeritas respectiva, qua

aqua in palmulam agit = $c - \frac{ua}{x}$ (§. XXXVI)

= $\frac{cx - ua}{x}$; & vis impellentis fluidi per §.



cit. $= \frac{mb^2 (cx - ua)^2}{4gx^2}$. Jam cum motus

in machinis ab aqua impulsis etiam ad æquabilitatem brevi reducatur, evanescet eo in casu momentum potentiæ actu moventis, eritque

$aP = Qx$, & $P = \frac{Qx}{a}$: itaque substituto va-

lore inventæ potentiæ, habetur $\frac{mb^2 (cx - au)^2}{4gx^2}$

$= \frac{Qx}{a}$; & facta reductione obtinetur valor $u =$

$\frac{cx}{a} - \frac{2x}{ab} \sqrt{\left(\frac{gQx}{ma}\right)}$.

2) Quæramus iterum valorem de x in casu celeritatis maximæ, erit $du = \frac{cdx}{a} - \frac{2dx}{ab}$

$\sqrt{\left(\frac{gQx}{am}\right)} - \frac{2dx}{2ab} \sqrt{\left(\frac{gQx}{am}\right)}$: unde eruitur

$cb = 3 \sqrt{\left(\frac{Qgx}{am}\right)}$. & $x = \frac{amc^2 b^2}{9gQ}$. est

vero $\frac{mb^2 c^2}{4g}$ vis absoluta incurrentis fluidi in

planum immobile (loc. cit.); quæ si dicatur $= A$, erit $\frac{4Aa}{9Q} = x$: inde deducetur pro hoc

casu velocitas oneris maxima $u = \frac{4cA}{27a}$; & alæ

$= \frac{1}{3} c$. Et velocitas oneris erit ad velocitatem

potentiæ, seu $x:a = \frac{4cA}{27Q} : \frac{1}{3} c = 4A : 9Q$;

in



in nullo alio casu major oneris celeritas dato tempore haberi potest.

* *Ex his intelligitur insufficiencia illius principii vulgo recepti: Omne virium compendium cum æquali dispendio temporis conjunctum est; pertinet hoc principium ad æquilibrium, non vero ad motum machinarum, in quo tamen maxime eorum usus consistit: quippe in æquilibrio requiritur, ut potentia movens, & resistentia cum celeritatibus reciprocent, seu resistentia sit ad potentiam, ut celeritas potentie se habet ad celeritatem resistentie; unde manente eadem resistentia, ac celeritate potentie, necesse est, ut quantum minuatur potentia movens, tantundem etiam celeritas oneris minuat: quantum vero huic detrahatur, tanto plus temporis requiretur, ut machina datum effectum præstet: quodsi vero de actuali machinarum motu agitur, ut machina effectum maximum dato tempore producat, non ita sane comparata esse debet, sicut in statu æquilibrii, quod aucta vel minimum potentia, aut ipsius celeritate mox tolleretur, ac in motum etiam finitum abiret, in quo celeritates cum potentiis proxime reciprocent; patet enim ex dictis, illum casum, in quo maximam oneris celeritatem, ac proinde etiam maximum effectum machine dato tempore dari invenimus, minime cum æquilibrio convenire. Vide dissert. Euleri de machinarum tam simplicium, quam compositarum usu maxime lucroso. Comm. Petrop.*

Tom. X. ad annum 1738.

O. A. M. D. G.

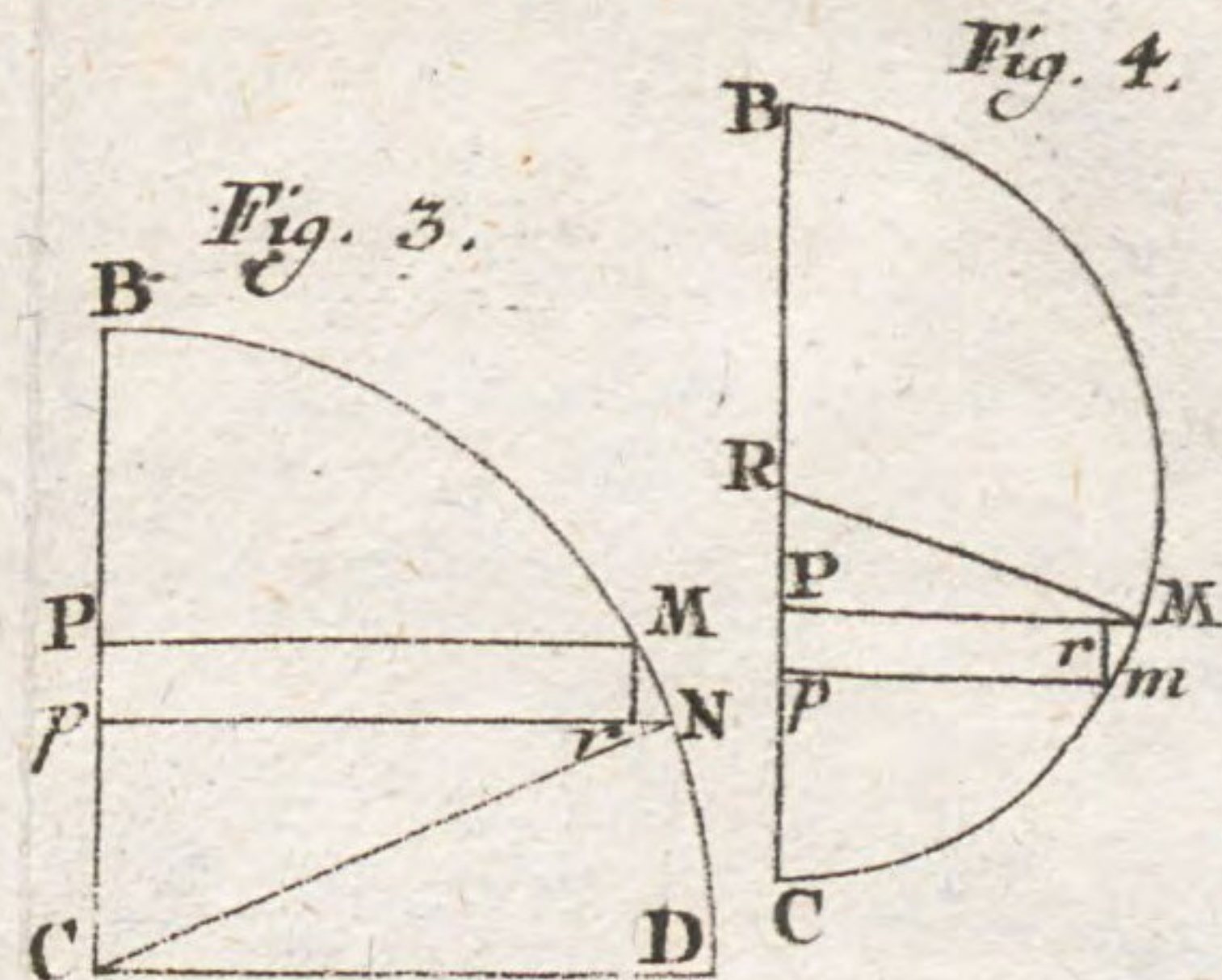
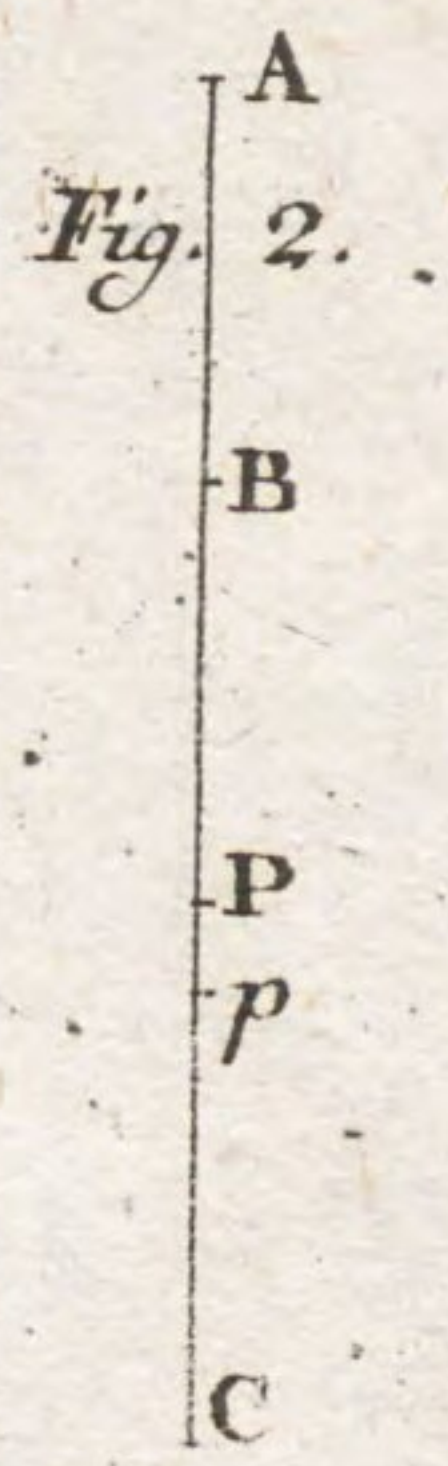
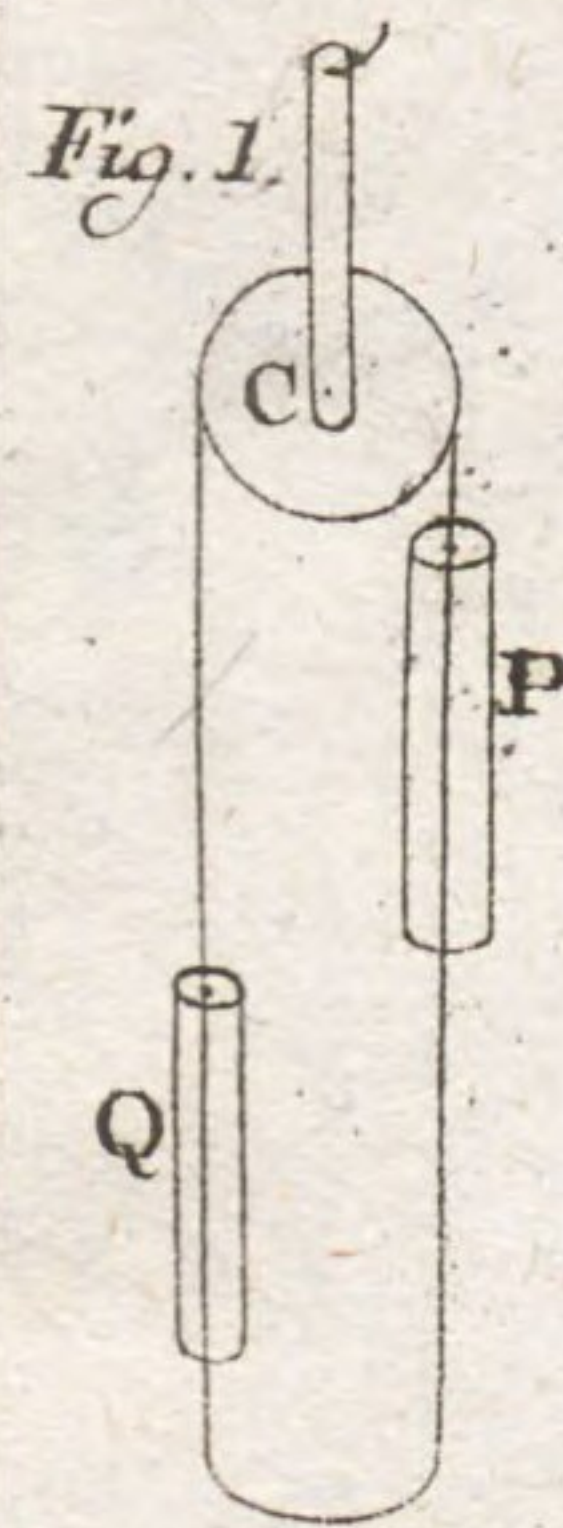
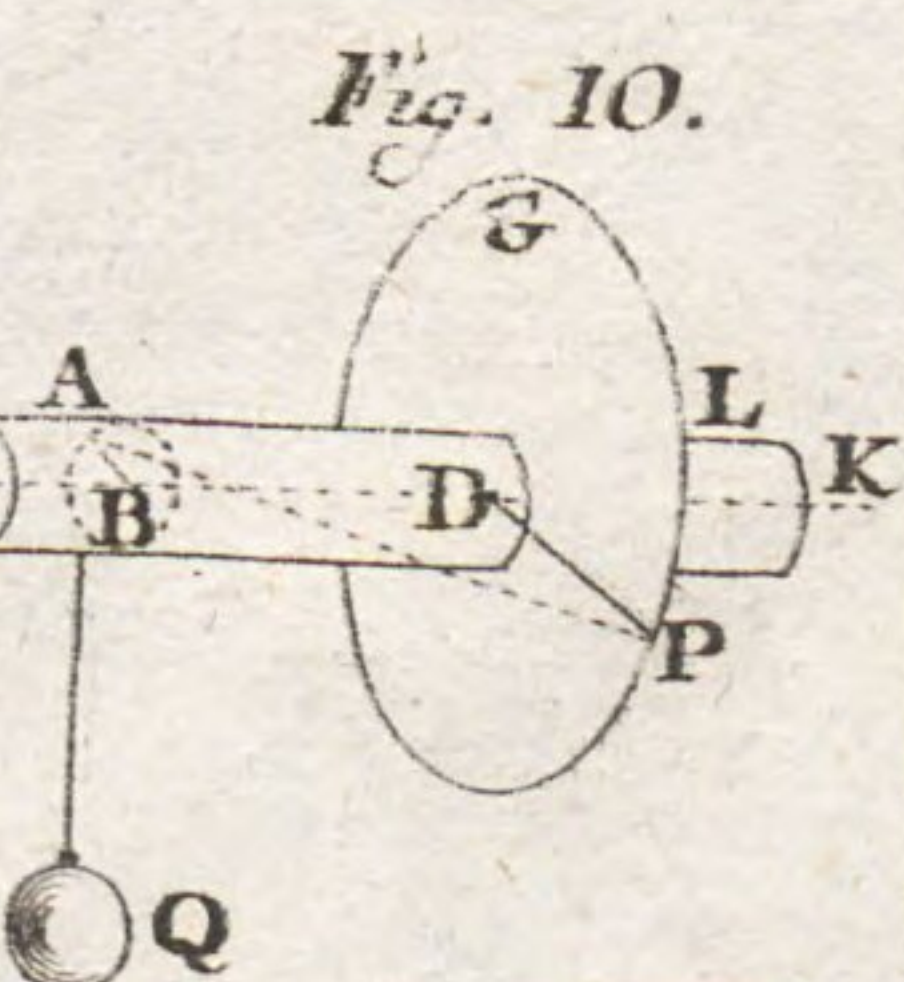
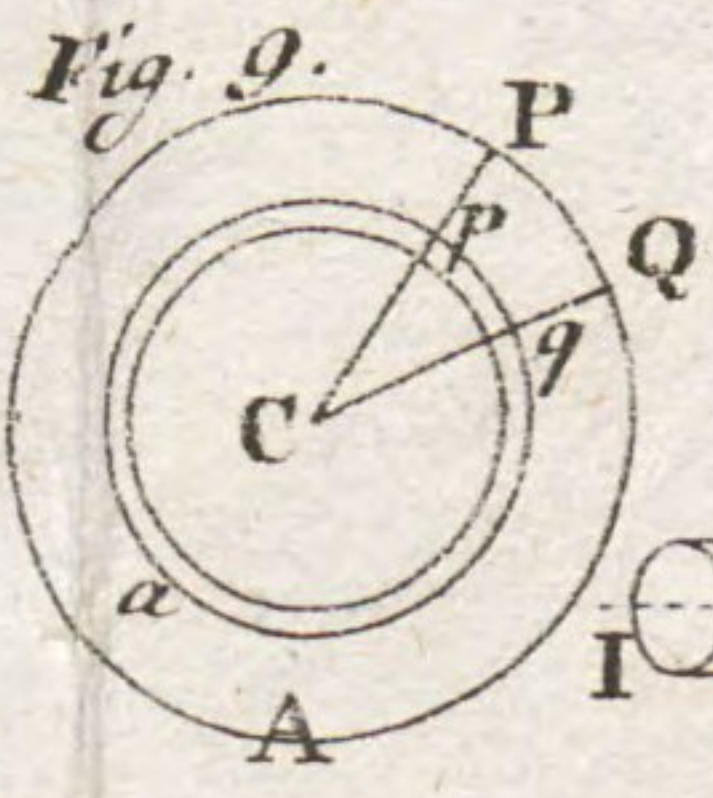
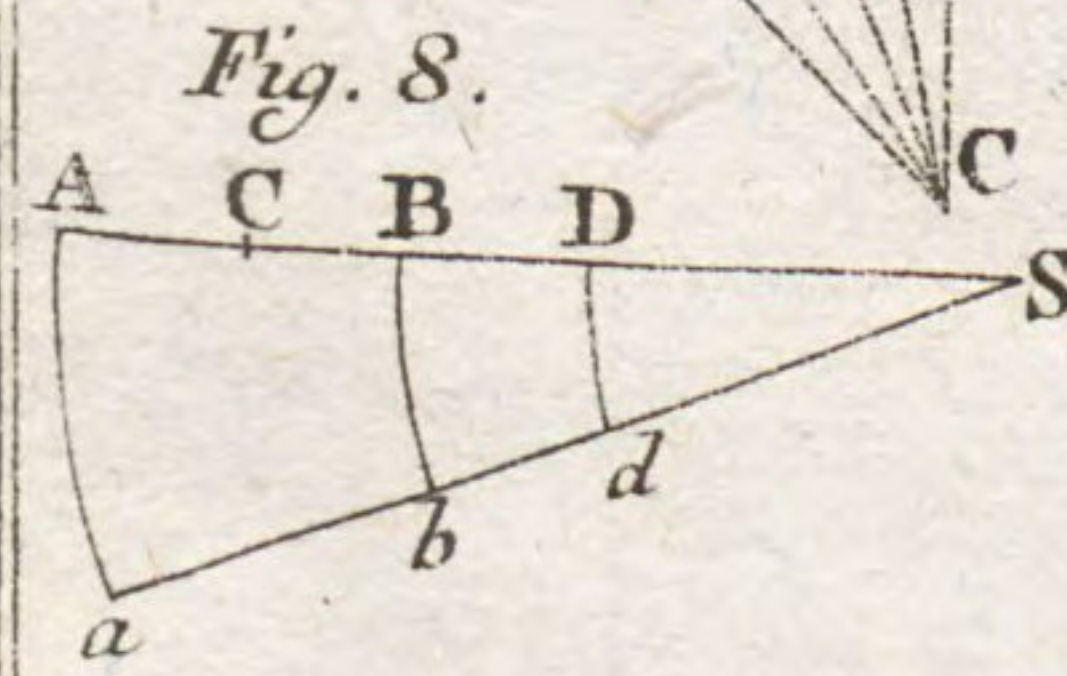
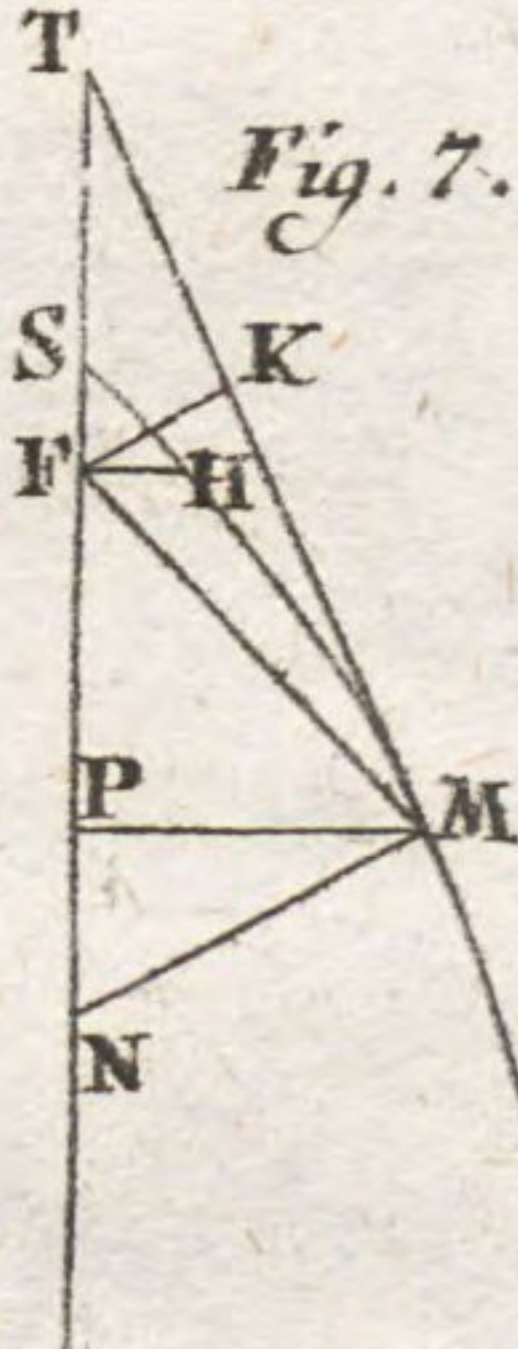
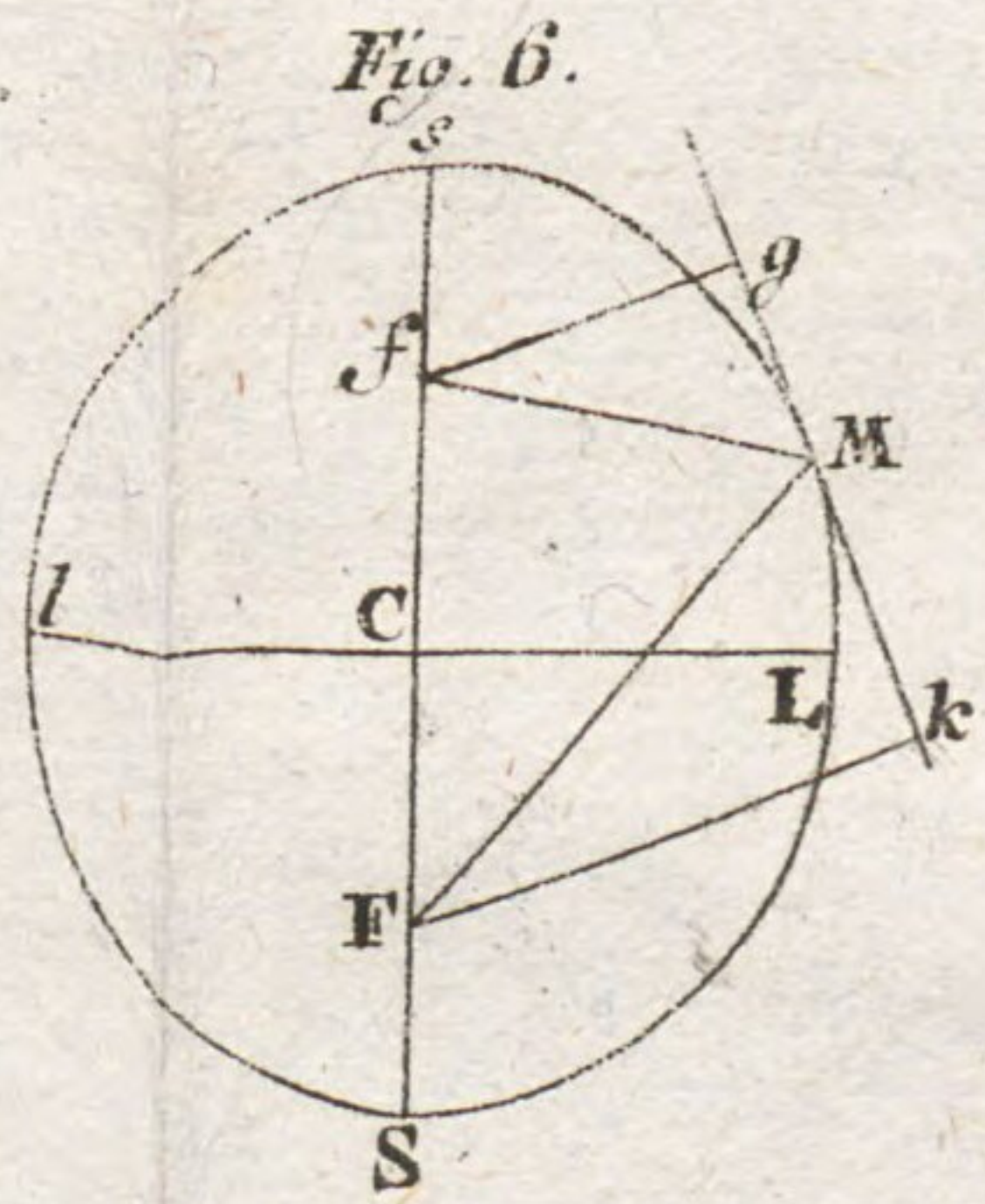
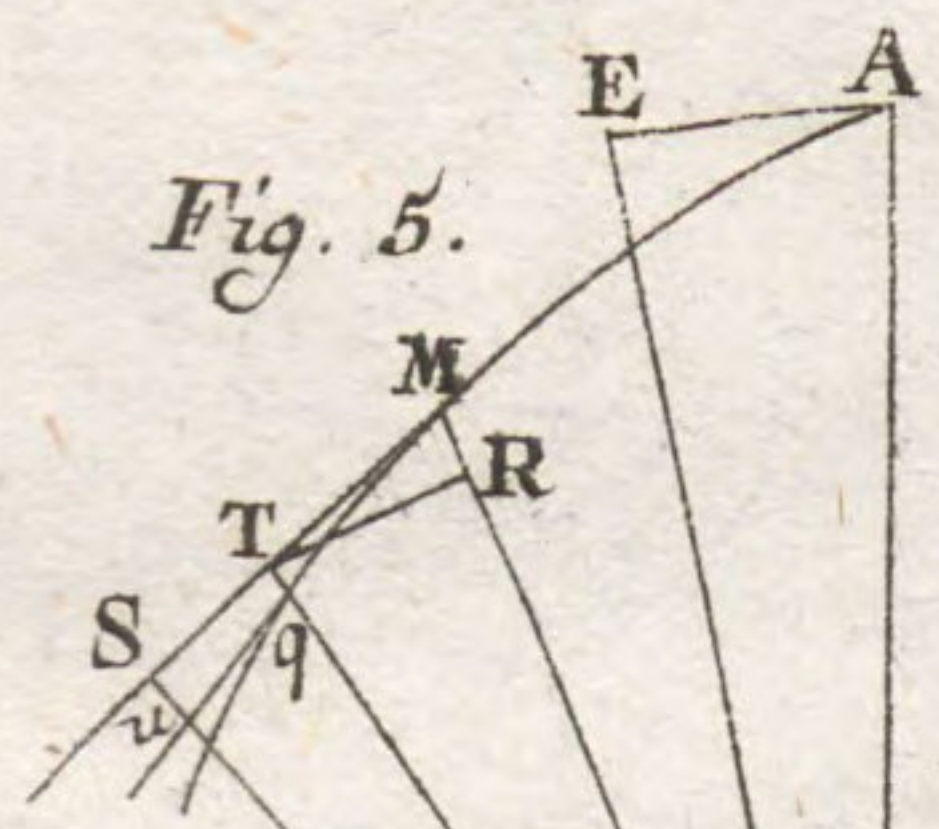


Fig. 4.



Zallinger zum Thurn, Franz Seraphin <<von>>,

De generali et absoluta virium mechanicarum mensura diss

Oenipontum 1777

Diss. 1653

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10847115-9

VD18 15130312-001